Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Joana Patrícia Santos Silva

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções Trigonométricas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Joana Patrícia Santos Silva

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções Trigonométricas

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores (2º ciclo), realizada sob a orientação científica do Doutor Luís António Arsénio Descalço e da Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Professor Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz
Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Teresa Mesquita Cunha Machado Malheiro
Professor Auxiliar, Universidade do Minho

Professor Doutor Luís António Arsénio Descalço
Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

A realização do presente trabalho não teria sido possível sem a preciosa colaboração da Doutora Paula Oliveira e do Doutor Luís Descalço. Muito obrigada, pelo modo como me orientaram, pela disponibilidade, pelo carinho e pelo incentivo dados em cada momento.

Ao meu marido, Artur Vasconcelos, com quem partilho esta conquista. A ele agradeço toda a compreensão e companheirismo, toda a força e confiança que em mim depositou.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, ao meu irmão e à minha avó, por acreditarem sempre em mim e naquilo que faço. Obrigada pelos seus exemplos e por todos os ensinamentos. Sem eles seria mais difícil chegar a esta fase da minha vida.

A todos os meus colegas de trabalho, aos diretores e aos alunos que, desde o início deste trabalho, sempre me apoiaram e incentivaram a sua realização.

A todas as pessoas que de uma forma ou de outra, direta ou indiretamente, me auxiliaram para que eu chegasse ao final do mestrado, transmitindo-me sempre palavras de força, coragem e persistência.

A todos, o meu bem-haja.

palavras-chave

Funções trigonométricas, seno, cosseno, tangente, Sage Mathematics, GeoGebra, questões de escolha múltipla, exercícios parametrizados

resumo

O presente trabalho tem por base o estudo das funções trigonométricas ao nível do ensino secundário. Para tal, foram estudadas essas funções e foram inferidas algumas das suas caraterísticas, como o domínio, o contradomínio, o período, os zeros, os máximos e mínimos, a paridade e as assíntotas, caso existam.

Foram também criados recursos digitais de apoio ao ensino destas funções, nomeadamente exercícios parametrizados sob a forma de escolha múltipla, recorrendo ao software Geogebra e Sage Mathematics. Estes recursos foram classificados e disponibilizados numa aplicação web.

keywords

Trigonometric functions, sine, cosine, tangent, Sage Mathematics, GeoGebra, multiple choice questions, parameterized exercises

abstract

This project is based on the study of trigonometric functions in high school education. We studied functions and inferred some of their features such as domain, range, period, zeros, maximum and minimum, parity and asymptotes if they exist.
Digital resources were created to support the teaching of these functions, namely parameterized exercises in the form of multiple choice questions, using the Geogebra and Sage Mathematics software. These resources have been classified and are available on an online application.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

> "A suprema arte do professor é despertar a alegria na expressão criativa do conhecimento, dar liberdade para que cada estudante desenvolva sua forma de pensar e entender o mundo, assim criamos pensadores, cientistas e artistas que expressarão nos seus trabalhos aquilo que aprenderam com seus mestres." - Albert Einstein

O presente trabalho, subordinado ao tema *Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções Trigonométricas*, tem dois objetivos fundamentais: por um lado pretende estimular e incentivar nos alunos o gosto pela matemática; por outro lado fornecer aos professores materais e novas tecnologias para a lecionação da disciplina.

Como refere J. Ponte [Ponte, J. (1997)], não se pode ensinar do mesmo modo a uns e a outros, que cabe ao professor tornar os assuntos suficientemente atraentes para que os alunos consigam fazer aprendizagens significativas.

Assim, nos nossos dias, os computadores devem ser entendidos como qualquer outra ferramenta de estudo, tal como uma régua, um lápis ou um caderno. Usados de forma adequada e eficiente, estes meios tecnológicos podem contribuir de forma fundamental para que os estudantes aprendam e sejam ensinados. Uma vez que na atualidade, as novas tecnologias são incontornáveis, a utilização do computador e das TIC no ensino de Matemática é uma recomendação expressa dos programas de Matemática.

Neste momento, aulas expositivas tradicionais, nas quais o professor apresenta o conteúdo, resolve alguns exercícios, passa uma interminável lista de atividades e, depois desse período, prepara um teste para avaliar a aprendizagem, já não atraem os alunos. Por este motivo, a escola tem e deve "mergulhar" no uso das tecnologias. Se o não fizer pode correr o risco de ser considerada ultrapassada.

Hoje em dia, as novas tecnologias estão ao alcance da maior parte dos alunos, o que permite um trabalho colaborativo entre os professores e os alunos, podendo, na maior parte dos casos, os alunos aceder aos materais publicados ou sugeridos pelo professor. É, no entanto, necessário salvaguardar casos em que não exista essa possibilidade. Os alunos jamais devem ser prejudicados ou discriminados.

1.1 Enquadramento

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão bibliográfica sobre as tecnologias de informação e comunicação na educação em Portugal, a matemática e as tecnologias de informação e comunicação, avaliação no processo de ensino aprendizagem, os programas de matemática no ensino em Portugal, questões de escolha múltipla e os projetos MEGUA e SIACUA.

1.1.1 As TIC na Educação em Portugal

A Sociedade atual, geralmente denominada Sociedade do Conhecimento e da Informação, vive já há alguns anos grandes transformações sociais e tecnológicas. Essas mudanças influenciam o modo como as pessoas se relacionam umas com as outras, como adquirem conhecimentos, como trabalham, etc. Segundo S. Pires [Pires, S. (2009)] as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) são um dos principais agentes destas transformações.

Nos últimos anos, segundo A. Silva [Silva, A. (2004)] a escola deixou de ser o lugar privilegiado onde o acesso a técnicas, instrumentos e experiências únicas eram possíveis. A escola é caracterizada aparecendo antes como um local conservador que não acompanhou a incrível evolução tecnológica. Para contrariar esta tendência, *Educar com os media* e *Educar para os media* passaram a ser princípios orientadores adjacentes a qualquer reforma educativa com a fundamentação de aproximar os universos comunicativo, social e escolar dos alunos [Pacheco, J. e outros (1998)].

Com o decorrer do tempo, foram várias as medidas legislativas que conduziram à introdução das TIC no sistema de ensino. Na década de 80, o nosso país assumiu, com alguma intensidade, o enfoque tecnológico, criando novos e pequenos espaços de aprendizagem numa lógica de renovação do próprio sistema educativo [Pires, S. (2009)].

As primeiras medidas desenvolvidas pelo Governo surgem com criação do projeto nacional Minerva (Meios Informáticos No Ensino, Racionalização, Valorização, Atualização), através do despacho 206/ME/85. Este projeto decorreu entre 1985 e 1994. Para J. Ponte [Ponte, J. (1994)], o projeto Minerva pretendia promover a introdução das Tecnologias da Informação e da Comunicação no ensino não superior em Portugal. Os objetivos indicados no despacho são os seguintes: incluir o ensino das TIC nos planos curriculares; promover o uso das TIC como meios auxiliares de ensino das outras disciplinas escolares e formar orientadores, formadores e professores. Segundo J. Ponte [Ponte, J. (1994)], este programa "encorajou o desenvolvimento de práticas de projeto dentro das escolas, contribuindo fortemente para o estabelecimento de uma nova cultura pedagógica, baseada numa relação professor/aluno mais próxima e colaborativa".

No final da década de 90, foram criados dois novos projetos com o objetivo de instaurar a Sociedade da Informação: o Programa Nónio Século XXI (1996-2002) e o Programa Internet na Escola (1997-2003).

O Programa Nónio Século XXI, criado pelo Ministério da Educação através do Despacho nº 232/ME/96, visava: "a melhoria das condições em que funciona a escola e o sucesso do processo ensino-aprendizagem; a qualidade e a modernização da administração do sistema educativo; o desenvolvimento do mercado nacional de criação de software para educação com finalidades pedagógicas e de gestão; a contribuição do sistema educativo para o desenvolvimento de uma sociedade de informação mais reflexiva e participada".

O Programa Internet na Escola surgiu em 1997, coordenado pelo Ministério da Ciência e da Tecnologia, teve como principal objetivo a colocação de um computador multimédia ligado à Internet, através da Rede Ciência, Tecnologia e Sociedade (RCTS), em todas as escolas.

Posteriormente, em 2005, foi criada a Equipa de Missão CRIE (Computadores, Rede e Internet nas Escolas) a quem, de acordo com o Despacho nº16 793/2005, competia genericamente conceber, desenvolver, concretizar e avaliar iniciativas mobilizadoras e integradoras no domínio do uso dos computadores, redes e Internet nas escolas e nos processos de ensino-aprendizagem.

Seguidamente, em 2007, foi implementado o Plano Tecnológico da Educação, através da Resolução do Conselho de Ministros n.º 137/2007 que, segundo consta no site oficial [PTE (2007)], tem como ambição "colocar Portugal entre os cinco países Europeus mais avançados ao nível de modernização tecnológica do ensino" e é composto por três eixos de atuação: Tecnologia, Conteúdos e Formação, que abrangem (de forma integrada e transversal) todos os domínios relacionados com a modernização do sistema educativo português. O Plano Tecnológico da Educação visa a distribuição de computadores portáteis, através dos programas: "e-escola", "e-escolinha", "e-professor" e "e-oportunidades". O primeiro abrange todos os "alunos que se inscrevam do 5.º ao 12.º ano de escolaridade"; enquanto que o segundo abrange "os alunos do 1.º ciclo do ensino básico", sendo que, neste caso, se trata de um computador distinto, denominado "Magalhães"; o terceiro abrange os "docentes que exerçam a sua atividade profissional na educação pré-escolar, no ensino básico e secundário" e o último, abrange os "trabalhadores em formação, inscritos na iniciativa Novas Oportunidades".

1.1.2 A Matemática e as TIC

O conceito de tecnologia evoluiu ao longo da História sobretudo na última década do século XX e na primeira do século XXI. Este facto tem-se verificado em diversas áreas, nomeadamente, na área da educação.

A Matemática, como ciência, teve sempre uma ligação às novas tecnologias, desde as calculadoras, os computadores, aos sistemas multimédia e à Internet. Desde meados de 1980, a utilização de redes de computadores para ensino e aprendizagem tem tido uma importância fulcral.

O termo TIC é bastante recente, surgiu nos finais dos anos 90, mais especificamente num documento elaborado pelo governo britânico. As TIC são constituídas por meios técnicos para manipular informação e promover comunicação, incluindo o hardware e o software necessários, e surgem associadas às redes computacionais [Ricoy, M. e Couto, M. (2012)].

As novas tecnologias vieram criar novas oportunidades de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática [Zbiek, R. e outros (2007)]. O uso da informática incentiva os alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos, a fim de efetuarem um trabalho de aprendizagem diferente do habitual, mais dinâmico e atrativo. O uso de tecnologias é referido no atual Programa de Matemática do Ensino Secundário.

Segundo o Programa e Metas Curriculares do Ensino Secundário de Matemática A, as salas de aula estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação.

Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar o computador em situações diversas e, em particular, devem ter oportunidade de trabalhar com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, que permitem conciliar as diferentes representações das funções. Dos vários programas de software dinâmico que existem, temos o exemplo do Geogebra. O Geogebra foi desenvolvido principalmente para o ensino e aprendizagem da Matemática ao nível do Ensino Básico e Secundário, por Markus Hohenwarter, na universidade americana Florida Atlantic University. Este software, para além de ter uma versão portuguesa e de dispor de uma vasta combinação de ferramentas, apresenta uma outra mais valia que é ser de uso livre, ficando assim disponível para professores e alunos, nas escolas e em casa.

Segundo J. Ponte e H. Oliveira [Ponte, J. e Oliveira, H. (2000)], a Internet é hoje a face mais visível das novas tecnologias de informação e comunicação, com uma presença cada vez mais forte na nossa vida quotidiana. A World Wide Web constitui uma "rede de redes", ligando entre si computadores espalhados por todo o mundo e pondo à nossa disposição um manancial inesgotável de informações e possibilidades de interação sobre os mais variados assuntos. Entre estes contam-se, naturalmente, muitos com relevância direta para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

A educação via WWW permite que professor e aluno, apesar de fisicamente separados, possam interagir, com o auxílio de algum tipo de tecnologia. Empresas e instituições de ensino têm investido grandes recursos em pesquisas relacionadas com a utilização de computadores em ambientes de ensino à distância como solução para o atendimento a uma demanda crescente, oferecendo novas oportunidades educacionais [Garcia, A. e Cunha, L. (2000)].

1.1.3 Avaliação no processo ensino-aprendizagem

A avaliação da aprendizagem dos alunos é uma das componentes críticas do processo educativo. Se esta for utilizada de uma forma apropriada, pode ser um fator decisivo para se atingirem os objetivos definidos. Caso contrário, pode pôr em causa quaisquer esforços de inovação e melhoria da qualidade dos métodos e técnicas pedagógicas: os testes são uma fonte de motivação e os alunos tenderão a estudar apenas aquilo que crêem lhes vai ser perguntado [Camilo, H. e Silva, J. (2008)].

A promoção do desenvolvimento global do aluno, através de aprendizagens adequadas, tem necessariamente que se inscrever numa lógica de coerência e articulação traduzida pela avaliação ao nível das suas diferentes modalidades, e nas quais se inscrevem simultaneamente critérios de realização e critérios de sucesso [Nunziati, G. (1990)].

Segundo o Decreto-lei n.º 139/2012, de 5 de julho, artigo 23.º, como a avaliação é um processo regulador do ensino, orientador do percurso escolar e certificador dos conhecimentos adquiridos e capacidades desenvolvidas pelo aluno, esta abrange aspetos diversificados do processo ensino/aprendizagem, integrando não só a avaliação dos conhecimentos e capacidades, mas também das atitudes e valores, tendo como objetivo o sucesso educativo do aluno.

Neste momento, os testes de escolha múltipla constituem uma das principais formas de avaliação em todo o mundo, já que aliam facilidade de execução e avaliação, economia de tempo e fiabilidade. Está provado que podem avaliar processamento cognitivo de alto nível de complexidade, como a interpretação, síntese e aplicação do conhecimento, além de testar a simples recordação de factos isolados [Camilo, H. e Silva, J. (2008)].

1.1.4 Questões de escolha múltipla

A existência de diferentes tipos de questões e, consequentemente, de diferentes funções que estas assumem, requer tanto do professor como dos alunos especial atenção, para que o processo de ensino e aprendizagem seja optimizado e mais produtivo [Loureiro, I. (2008)].

A formulação de questões é uma atividade frequente tanto no quotidiano como na sala de aula. Uma das competências dos docentes que conduzem a uma boa prática educativa e que, por conseguinte, ajuda a melhorar a aprendizagem dos alunos, tem a ver com a capacidade de colocar questões/problemas, de preferência centradas em assuntos do dia a dia, com vista a promover a reflexão e a desenvolver o espírito crítico dos alunos [Wragg, E. e Brown, G. (2001)].

Segundo A. Pinto [Pinto, A. (2001)] no sistema escolar há conhecimentos adquiridos importantes que são da ordem das competências, das habilidades e do saber fazer, tal como a leitura e a escrita. No entanto, há também outros que são de natureza declarativa e podem ser avaliados através de perguntas de escolha múltipla ou de perguntas de desenvolvimento. A avaliação do conhecimento escolar, ou outros conhecimentos de índole geral, por meio de perguntas de escolha múltipla é cada vez mais frequente entre os docentes, alunos e instituições. Este facto deve-se sobretudo, à facilidade de correção, para os professores; à eliminação da subjetividade de correção reduzindo substancialmente o poder de discriminação dos docentes, tornando a avaliação mais justa para os alunos; aos ganhos económicos substanciais que a sua aplicação apresenta para as instituições quando está em causa a avaliação de milhares de alunos. Também H. Camilo e J. Silva [Camilo, H. e Silva, J. (2008)] apontam as seguintes vantagens para a utilização destas questões:

- objetividade: cada resposta é previamente considerada correta ou incorreta: não há espaço para a impressão e potencial enviesamento subjetivo na apreciação da resposta dos alunos;
- abrangência: a avaliação envolve sempre um processo de amostragem dos tópicos e objetivos de aprendizagem;
- equidade: as perguntas e as condições são exatamente iguais para todos os alunos;
- boas qualidades psicométricas: revelam alta fidedignidade e validade;
- feedback rápido: a correção rápida contribui para a função formativa da avaliação, uma vez que os alunos podem saber rapidamente quais são os seus pontos fortes e fracos.

A. Pinto [Pinto, A. (2001)] refere que as perguntas de escolha múltipla, designadas na sua obra por PEMs, fazem parte da maioria dos exames a que um estudante é submetido ao longo do processo escolar. As PEMs são usualmente designadas por provas objetivas, embora o elemento objetivo destas provas se limite apenas ao sistema de correção que é bastante mais fiel do que o seguido por sistemas alternativos e que pode até ser efetuado de forma mecânica. As provas objetivas de avaliação são formadas por vários tipos, onde se incluem, entre os tipos mais frequentes:

- perguntas de escolha múltipla com 3 a 5 opções (por vezes mais);
- perguntas de escolha múltipla emparelhada;
- perguntas de escolha dupla verdadeiro-falso;
- perguntas para completar com palavras.

As provas objetivas de avaliação, usadas habitualmente, seguem o formato de perguntas de escolha múltipla com quatro opções.

Depois de efetuar várias experiências, A. Pinto [Pinto, A. (2001)], salienta que o formato mais convencional das PEMs é constituído por um enunciado, normalmente em forma de pergunta, seguido por quatro alternativas, assinaladas pelas letras A, B, C e D, uma em cada linha numa distribuição vertical. Uma das alternativas é correta e deve ser identificada e assinalada pelo aluno, e as restantes alternativas são falsas e designam-se por *distratores*, uma vez que distraem o estudante, afastando-o da resposta correta.

Há certas regras frequentemente seguidas para a elaboração de PEMs, que não são o resultado de uma ciência própria, pois esta não existe. A. Pinto [Pinto, A. (2001)] salienta que estas regras estão relacionadas com a experiência e sugestões de autores de manuais escolares e ainda com alguns princípios seguidos na elaboração de testes padronizados de aptidão escolar. Seguidamente, apresentamos algumas dessas regras ou sugestões relacionadas com a elaboração do enunciado, a resposta correta, a escolha dos distratores e o formato global da pergunta.

Quanto ao enunciado, segundo A. Pinto [Pinto, A. (2001)], este deve incluir a ideia chave e a maior parte da informação em análise. O enunciado deve ser uma pergunta positiva, pois este é mais fácil de compreender do que o negativo. No caso de um enunciado negativo recomenda-se que a palavra "não" seja sublinhada. O enunciado deve seguir, de preferência, um formato de pergunta em vez de um formato para completar. Ele deve formular a pergunta de tal modo que o estudante saiba responder, ou o possa fazer, antes de ler as alternativas. O formato em pergunta permite ao estudante responder adequadamente e imediatamente, antes de ler as alternativas, evitando parte da confusão que a leitura destas possa gerar. Algumas das desvantagens do formato para completar são as seguintes: a obrigação de leituras sucessivas e o aumento da dificuldade de compreensão por parte dos estudantes de culturas e etnias não-dominantes. O uso de espaços em branco nas perguntas para completar deve ser incluído, de preferência, no final do enunciado e não no início ou no meio. Um espaço em branco no início ou no meio do enunciado dificulta a compreensão.

Relativamente à escolha da resposta correta, no formato usual de PEMs, deve haver uma e única alternativa correta. Às vezes, por desconhecimento, distração, pressão do tempo, ambiguidade e falta de revisão, há mais do que uma opção correta. Outras vezes, uma alternativa, considerada correta num momento, pode vir a tornar-se errada numa altura posterior, ou vice-versa, devido aos avanços do conhecimento. Quando há dúvidas de que uma alternativa é realmente correta, o melhor a fazer é anular a questão. A resposta correta deve distribuir-se de forma mais equiprovável possível pelas várias opções ou alternativas adotadas no conjunto das PEMs que constituírem o exame. Se não for equiprovável, um estudante habilidoso é capaz de detetar o sistema de respostas [Pinto, A. (2001)].

No que concerne ao número de distratores, alternativas ou opções, A. Pinto [Pinto, A. (2001)] refere que este varia normalmente de três a cinco. Na avaliação por PEMs, uma das grandes dificuldades é a seleção das alternativas ou distratores aceitáveis e adequados. Muitas PEMs permitem a elaboração de um bom distrator, às vezes dois distratores e muito raramente três. Quando os distratores não têm o mesmo estímulo em relação à opção correta, os distratores perdem eficácia e são facilmente rejeitados por um estudante minimamente bom na realização de testes de PEMs, o que vai aumentar a probabilidade de acertar. Com distratores pouco eficientes, a probabilidade de acertar na resposta correta sobe progressivamente de 0.25 para 0.5 ou até mesmo para 1, por pergunta. Na generalidade, um distrator deve ser selecionado por estudantes com poucos ou nenhuns conhecimentos e rejeitado pelos bons alunos. Um distrator deve assemelhar-se a uma resposta correta e gerar dúvidas nos estudantes que não possuem um conhecimento específico.

Para a seleção dos distratores A. Pinto [Pinto, A. (2001)] desaconselha a inclusão da alternativa "Todas as anteriores [alternativas] são corretas", ou "nenhuma das anteriores [alternativas] é correta", ou "não sei". A alternativa "nenhuma é correta" deve ser também evitada, porque para cada pergunta deve existir sempre uma resposta correta, se for convenientemente formulada. Também não devem ser utilizadas as alternativas impossíveis, ou que incluem expressões como "sempre" e "nunca". É ainda aconselhável eliminar todas as pistas ou indicações de natureza gramatical, sintática e linguística que possam orientar o estudante para a alternativa correta. A extensão das frases de cada distrator deve ser constante, caso contrário, deve dispor-se do mais breve para o mais longo.

No que diz respeito ao formato global, A. Pinto [Pinto, A. (2001)] refere que cada PEM deve estar relacionada com uma aprendizagem específica ou objetivo de instrução, sublinhando o alinhamento entre o ensino e a avaliação. Deve basear-se em conhecimentos sólidos e bem fundamentados, raramente em perspetivas controversas. Se esta for controversa, o enunciado da pergunta deve assinalá-lo, por exemplo: "Segundo a perspetiva de ...". Cada PEM deve basear-se de preferência numa única ideia, ou tipo de conteúdo, seja ele conceito, facto, princípio ou procedimento. As PEMs devem ser, tanto quanto possível, breves e curtas de forma a melhorar a clareza de interpretação. Na elaboração de PEMs devem evitar-se as seguintes situações:

- questões problemáticas e ambíguas às quais mesmo os melhores alunos têm dificuldades em responder;
- a avaliação de conhecimentos irrelevantes e sem importância e informações que não foram aprendidas;
- discriminações bastante subtis;
- questões com a intenção de confundir e enganar os alunos.

1.1.5 MEGUA e SIACUA

Apresentam-se dois projetos de software de diferente especificidade para uso de autores, professores e estudantes: MEGUA (Mathematics Exercise Generator, Universidade de Aveiro) [Megua] e SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem, Universidade de Aveiro) [Siacua]. Esta apresentação é baseada no poster do Teaching Day [Megua & Siacua (2013)].

No projeto MEGUA é desenvolvido um software, com o mesmo nome, para produção de recursos digitais para web ou documentos em papel na área de matemática. O projeto SIACUA tem como missão o desenvolvimento de um sistema para apoio ao estudo autónomo. Disponibiliza os recursos aos estudantes de forma interativa, permitindo a autoavaliação e dando-lhe feedback imediato. Estes dois projetos complementam-se, uma vez que no primeiro se desenvolve uma ferramenta para criação de exercícios parametrizados e no segundo desenvolve-se um ambiente interativo que usa os exercícios criados.

1.1.5.1 Projeto MEGUA

O principal objetivo deste projeto é criar e partilhar bases de dados de exercícios parametrizados e respetivas resoluções detalhadas, construídos sobre a plataforma Sage Mathematics usando a biblioteca de software MEGUA.

Cada objeto MEGUA descreve-se sumariamente na seguinte figura.

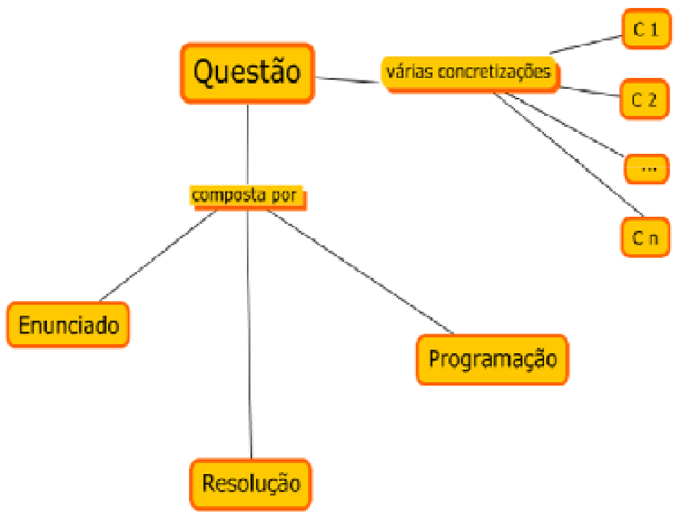

Figura 1.1: O objeto MEGUA [Megua & Siacua (2013)]

Depois de escolher um tópico, formula-se uma questão parametrizada, composta por três secções:

- Enunciado
- Resolução detalhada
- Programação

As duas componentes de um objeto do MEGUA são as seguintes:

- o texto, usando a linguagem tipográfica LaTeX e HTML;
- a programação, usando linguagem Python e biblioteca de funções matemáticas definidas no Sage Mathematics e outras definidas na package MEGUA.

A consulta de arquivos de exercícios permite ao docente a rápida elaboração de material didático para apoio às aulas e à avaliação.

O autor que concebeu e produziu o exercício pode modificá-lo ou criar variações adaptadas a novos contextos, mas também partilhá-lo com outros utilizadores.

Na figura seguinte podemos verificar a utilização de um objeto MEGUA em diferentes contextos.

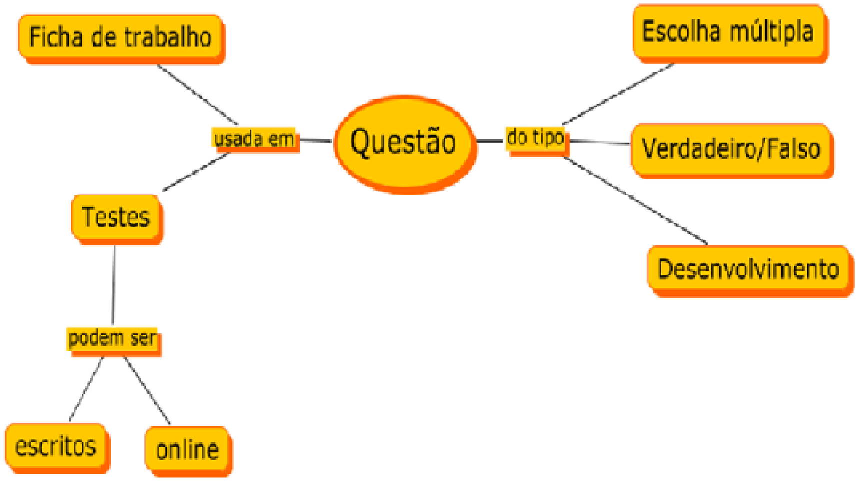

Figura 1.2: Como usar um objeto MEGUA [Megua & Siacua (2013)]

1.1.5.2 Projeto SIACUA

O principal objetivo deste projeto é disponibilizar um sistema de apoio ao estudo autónomo, na forma de uma aplicação Web, que fornece feedback ao utilizador sobre o seu progresso no estudo, com base nas respostas que vão sendo fornecidas ao sistema.

Atualmente o feedback existe a dois níveis. Ao nível da questão, sendo o aluno informado de imediato se acertou ou errou e vendo a resolução detalhada caso erre ou opte por não responder. E também ao nível do progresso geral no tema, sob a forma de barras de progresso, em que o estudante pode clicar para fazer aparecer uma questão ao acaso sobre o conceito correspondente.

Na implementação do SIACUA foi usado C# e SQL, e os pacotes de Software Genie & Smile na implementação de um modelo Bayesiano de utilizador, o qual é usado para atualizar as barras de progresso no tema em estudo.

A aplicação está a ser usada pela primeira vez no ano letivo 2013/2014, na Universidade de Aveiro, na disciplina de Cálculo III e o feedback dos alunos nas aulas e através de inquérito parece muito positivo, em particular solicitando a disponibilização de um maior número de exercícios de escolha múltipla com resolução detalhada do MEGUA.

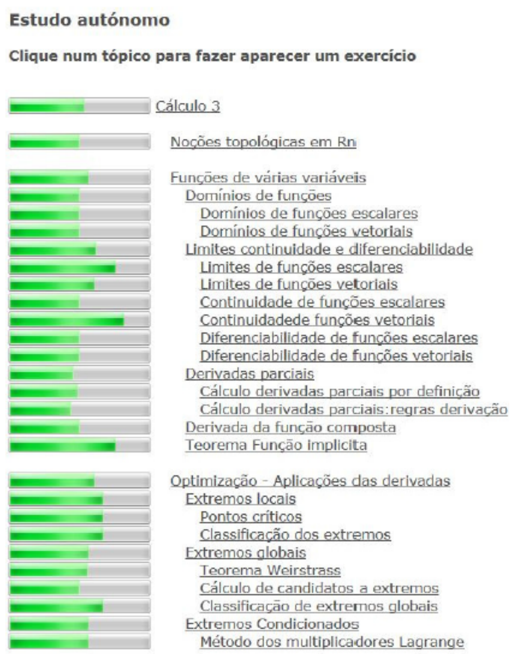

Figura 1.3: Barras de Progresso no Cálculo III no SIACUA

Capítulo 2

Funções Trigonométricas

2.1 História da Trigonometria

A palavra trigonometria, de origem grega, pode ser decomposta em tri(três), gono(ângulos) e metron(medida), ou seja, significa medida dos triângulos. A trigonometria é o estudo da matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Há referências a alguns aspetos relacionados com a origem da trigonometria em vários domínios, de que se destaca a astronomia. Segundo D. Struik [Struik, D. (1997)] "a Matemática, através da história e até à atualidade, não pode ser separada da astronomia". Primeiramente, para resolver o problema da navegação, os gregos preocuparam-se em determinar o raio da Terra e a distância da Terra à Lua, para tal, o primeiro cálculo do perímetro da circunferência da Terra foi realizado por Erastóstenes (250 a.C.), bibliotecário de Alexandria. Os seus cálculos dependiam do ângulo formado pela sombra do sol e pela vertical em dois pontos: um ao norte e outro ao sul. No entanto outros autores consideram, que foram os astrónomos como o grego Hiparco (190 aC - 125 aC), designado o pai da Astronomia e da Trigonometria, que estabeleceram as primeiras relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Struik [Struik, D. (1997)], salienta que um dos maiores documentos do segundo período da Alexandria foi A Grande Coleção, de Ptolomeu, mais conhecido pelo seu título arabizado *Almagesto* (c. 150 d.C.). O *Almagesto* foi uma obra de astronomia, que também contém trigonometria, nomeadamente as fórmulas para o seno e cosseno da soma e da diferença de dois ângulos, juntamente com o começo de trigonometria esférica.

No início do século VIII, com o apoio de trabalhos hindus, matemáticos árabes contribuíram notavelmente para o avanço da trigonometria. Este avanço continuou, no século XV, após a construção da primeira tabela trigonométrica, por um matemático alemão nascido na Baviera, chamado Georg Peurbach (1423-1461). Ao matemático e cosmógrafo alemão Johannes Müller Von Königsberg, mais conhecido por *Regiomontano*, é atribuído o estudo da trigonometria, pela primeira vez, como uma ciência independente da astronomia, tendo traduzido e comentado o *Almagesto*. O primeiro trabalho matemático, escrito por Johann Müller, sobre trigonometria foi o "Tratado dos triângulos", uma introdução completa à trigonometria, contendo a lei dos senos num triângulo esférico.

O matemático francês Viète contribuiu extraordinariamente para o desenvolvimento da trigonometria, na segunda metade do século XVI. Foi Viète quem, pela primeira vez, fez um recurso sistemático ao círculo trigonométrico e aplicou a trigonometria na resolução de problemas algébricos, introduzindo a primeira notação algébrica sistematizada e contribuindo para o desenvolvimento da teoria das equações.

Mais tarde, já no século XVII, o matemático francês Roberval, na sua obra *Traité des indivisibles*, formulou problemas relacionados com o seno e fez o primeiro esboço do gráfico de uma curva de seno. Com Roberval, a trigonometria passa de uma área de cálculo, como era entendida até então, para uma abordagem em termos de função.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) deu notáveis contribuições para a trigonometria atual. A apresentação feita adquiriu a sua forma quase definitiva, com as suas conceções de valores trigonométricos, como razões, e a útil notação, que data da *Introductio it analysin infinitorum* (1748).

Posteriormente, já no século XIX, Joseph Fourier (1768-1830), na sequência de estudos que realizou sobre movimentos periódicos, fez a ligação efetiva da trigonometria à análise. Em 1822, Fourier publicou o seu célebre *Théorie analytique de la chaleur*, onde divulgou o estudo das funções periódicas e demonstrou que a condução do calor em corpos sólidos poderia ser expressa por séries de funções trigonométricas.

2.2 Razões Trigonométricas

Dado o seu papel importante na definição das funções trigonométricas, começamos por definir as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Considere-se a seguinte figura:

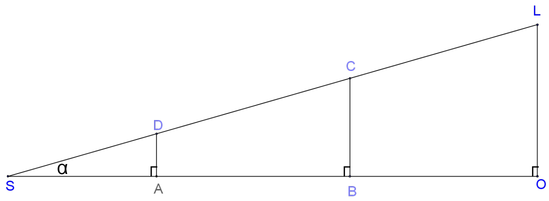

Figura 2.1: Triângulos Semelhantes

Os triângulos [SAD], [SBC] e [SOL] são semelhantes: têm em comum um ângulo reto e o ângulo α.

Assim, tem-se:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{LO}}{\overline{OS}} = k, \; k \text{ constante}$$

Esta razão constante entre os catetos dos vários triângulos retângulos não depende das suas dimensões, mas apenas da amplitude do ângulo α. Chamamos a esta razão constante a *tangente* do ângulo α.

Para fixarmos linguagem, consideremos um triângulo retângulo [ABC]:

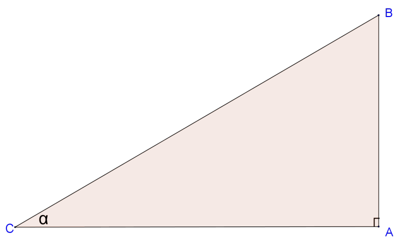

Figura 2.2: Triângulo retângulo

O cateto oposto ao ângulo α é [AB], o cateto adjacente ao mesmo ângulo é [AC] e [BC] é a hipotenusa do triângulo.

Definição 2.2.1. Num triângulo retângulo chama-se *tangente* de um ângulo agudo à razão entre os comprimentos do cateto oposto ao ângulo e do seu cateto adjacente.

Atendento à Fig 2.2, temos que a tangente de α é $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Escrevemos:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

A tangente de um ângulo é uma *razão trigonométrica*, isto é, razão entre os comprimentos dos lados de um triângulo. Há a considerar outras razões trigonométricas, a saber:

Definição 2.2.2. Num triângulo retângulo chama-se *seno* de um ângulo agudo à razão entre os comprimentos do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa do triângulo.

Considerando a Fig 2.2, o seno de α é $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Escrevemos:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Definição 2.2.3. Num triângulo retângulo chama-se *cosseno* de um ângulo agudo à razão entre os comprimentos do cateto adjacente ao ângulo e da hipotenusa.

Considerando a Fig 2.2, o cosseno de α é $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Escrevemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

2.3 Definições

Nesta secção vamos definir alguns conceitos essenciais para o estudo das funções reais de variável real. Os conceitos de seguida apresentados foram retirados de J. Silva [Silva, J. (1994)], por nos parecerem adequados ao trabalho aqui apresentado. Comecemos pela definição de função.

Definição 2.3.1. Dados dois conjuntos A e B, chama-se *função* de A em B a toda a correspondência unívoca definida de A para B, isto é, que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B.

Ao conjunto A chama-se *domínio* da função e aos seus elementos chamam-se *objetos*. O conjunto B é o *conjunto de chegada da função*.

A cada elemento x pertencente ao domínio de uma função f corresponde um único elemento que se diz a sua *imagem* e que se representa por $f(x)$.

Ao conjunto formado pelas imagens dos elementos do domínio chama-se *contradomínio.*

À variável $x \in A$ chama-se *variável independente* e a $y = f(x) \in B$ dá-se o nome de *variável dependente.*

Definição 2.3.2. Chama-se *função real de variável real* a toda a função cujo domínio e contradomínio são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Quando o domínio da função não é especificado, será o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a expressão $f(x)$ tem significado e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

Muitas das propriedades de uma função f podem ser inferidas de uma forma bastante simples através da visualização do seu gráfico. Chama-se *gráfico de* f ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pelos pares ordenados dos objetos e das respetivas imagens, isto é, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$, onde $D \subseteq \mathbb{R}$ representa o domínio da função f.

Definição 2.3.3. Um *zero* de uma função é todo o elemento do domínio cuja imagem é zero.

$$x \text{ é zero de } f \;\Leftrightarrow f(x) = 0$$

Definição 2.3.4. Uma função diz-se *injetiva*, se a pontos diferentes do seu domínio, corresponderem imagens diferentes no seu conjunto de chegada. Dito de outro modo: para todos os pontos x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, se x_1 for diferente de x_2 então $f(x_1)$ é diferente de $f(x_2)$. Em linguagem matemática

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Para justificar que uma função não é injetiva, basta indicar um exemplo de dois objetos diferentes que tenham a mesma imagem. Geometricamente, uma função real de variável real é injetiva, quando a diferentes abcissas de pontos do gráfico não pode corresponder a mesma ordenada, ou seja, qualquer reta horizontal (lugar geométrico de pontos com ordenada constante) só poderá intersetar o gráfico da função quando muito uma vez.

Definição 2.3.5. Uma função f de domínio D é *sobrejetiva* se qualquer ponto do conjunto de chegada B pertencer ao contradomínio, ou seja, se o conjunto de chegada B coincidir com o contradomínio $f(A)$, ou ainda, se para qualquer ponto do conjunto de chegada B for possível encontrar um ponto do domínio D tal que $f(a) = b$.

$$\forall b \in B, \exists a \in D : f(a) = b$$

No caso de uma função real de variável real, uma função é sobrejetiva se qualquer reta horizontal intersetar o gráfico de f pelo menos uma vez.

Definição 2.3.6. f é *bijetiva* se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

Quanto à monotonia de uma função real de variável real, temos as seguintes definições:

Seja f uma função real de variável real de domínio $]a, b[$.

Definição 2.3.7. A função f é *monótona crescente*, ou simplesmente *crescente*, se f mantiver a ordenação dos elementos (podendo igualá-los) do domínio, ou seja, dados dois quaisquer pontos x_1 e x_2 do intervalo $]a, b[$ se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$, simbolicamente

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definição 2.3.8. A função f é *estritamente crescente*, se f mantiver estritamente a ordenação dos elementos do domínio, ou seja, dados dois quaisquer pontos x_1 e x_2 do intervalo $]a, b[$ se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$, simbolicamente

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Definição 2.3.9. A função f é *monótona decrescente*, ou simplesmente *decrescente*, se f trocar a ordenação dos elementos (podendo igualá-los) do domínio, ou seja, dados dois quaisquer pontos x_1 e x_2 do intervalo $]a, b[$ se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$, simbolicamente

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definição 2.3.10. A função f é *estritamente decrescente*, se f trocar estritamente a ordenação dos elementos do domínio, ou seja, dados dois quaisquer pontos x_1 e x_2 do intervalo $]a, b[$ se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$, simbolicamente

$$\forall x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Definição 2.3.11. Uma função diz-se *monótona*, num determinado intervalo contido no seu domínio, se é sempre crescente ou sempre decrescente nesse intervalo.

Definição 2.3.12. A função f diz-se *constante* se para todo $x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2)$.

Definição 2.3.13. Seja f uma função definida num intervalo I e seja $x_0 \in I$. Dizemos que f atinge um *máximo relativo* em x_0, ou que $f(x_0)$ é um máximo relativo da função f se existe um intervalo $]c, d[$ contido em I e contendo x_0, tal que

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in]c, d[$$

Definição 2.3.14. Seja f uma função definida num intervalo I e seja $x_0 \in I$. Dizemos que f atinge um *mínimo relativo* em x_0, ou que $f(x_0)$ é um mínimo relativo da função f se existe um intervalo $]c, d[$ contido em I e contendo x_0, tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in]c, d[$$

Se estas condições forem válidas em I os extremos relativos são chamados *extremos absolutos*.

Definição 2.3.15. A função f é *periódica* se existir algum real p positivo tal que para todo o x real se tenha $f(x+p) = f(x)$, simbolicamente

$$\exists p > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+p) = f(x)$$

Ou seja, a função f é periódica se o seu comportamento se repetir rigorosamente em intervalos de amplitude p. Ao real p nestas condições chama-se *período* da função f. Ao menor $p > 0$ que satisfaz a condição $f(x+p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ chama-se *período fundamental* de f. Geralmente diz-se apenas período da função, quando se fala no período fundamental.

Para falarmos de *paridade* de uma função, o seu domínio deve ser um conjunto simétrico, isto é, se $x \in D$, o seu simétrico $-x$ também está em D.

Definição 2.3.16. Seja f uma função definida num conjunto simétrico D. Uma função f é par se e só se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.
O gráfico de uma função *par* é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

Definição 2.3.17. Seja f uma função definida num conjunto simétrico D. Uma função f é *ímpar* se e só se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.
O gráfico de uma função ímpar é simétrico relativamente à origem dos eixos coordenados.

2.4 Seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico

As funções trigonométricas, como funções reais de variável real não podem usar os ângulos no sistema sexagesimal. Comecemos esta secção pela conversão do sistema sexagesimal para radianos.

A palavra *radiano* foi usada pela primeira vez em 1871 por James Thompson, professor no Queen's College de Belfast, na Irlanda.

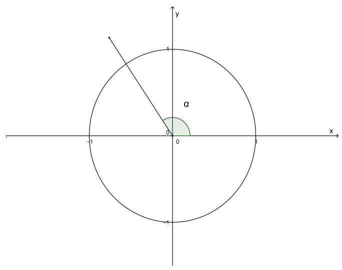

Figura 2.3

Definição 2.4.1. Um *radiano* (rad) é a amplitude de um ângulo ao centro definido num círculo, por um arco de circunferência com o mesmo comprimento do arco de círculo.

Com uma regra de três simples ou com uma calculadora é simples efetuar a conversão entre graus e radianos.

Como o perímetro do círculo de raio r é $2\pi r$, podemos dizer que o raio "cabe" 2π vezes na circunferência, ou seja, um radiano "cabe" 2π vezes num arco de 360^{o}. Logo,

$$2\pi rad = 360^{o}$$

Anteriormente, estudámos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de um ângulo agudo. No entanto, nem todos os ângulos são agudos, como tal vamos definir as razões trigonométricas para todos os ângulos em geral.

Comecemos por considerar um ângulo ao centro numa circunferência. A um dos lados chamamos *lado origem* e ao outro *lado extremidade*. Quando o lado extremidade se afasta no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio diz-se que se desloca no *sentido positivo*, quando se afasta no sentido dos ponteiros do relógio diz-se que se desloca no *sentido negativo*, como se ilustra na figura seguinte:

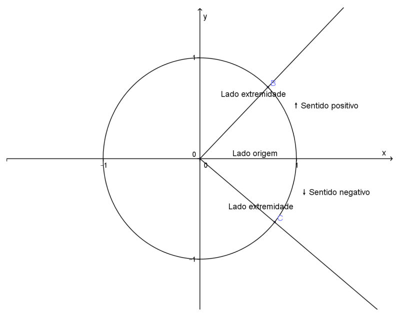

Figura 2.4

Consideremos um círculo trigonométrico, círculo de raio uma unidade de comprimento e centrado na origem do referencial.

Para determinar as razões trigonométricas necessitamos de um triângulo retângulo no primeiro quadrante, para tal traçamos uma perpendicular ao eixo dos xx a partir do ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência que delimita o círculo.

Como o círculo tem raio 1, as razões trigonométricas ficam a depender apenas das coordenadas x e y do ponto de interseção do lado extremidade com a circunferência que limita o círculo.

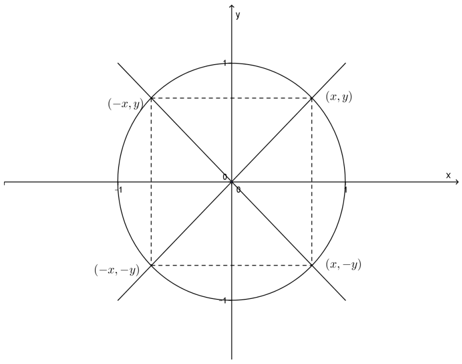

Figura 2.5

Associamos, assim, o seno ao valor da ordenada, o cosseno ao valor da abcissa e a tangente ao quociente entre a ordenada e a abcissa.

Com isto, podemos generalizar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a todos os ângulos agudos e obtusos, como ilustrado na Figura 2.5.

Em suma, o seno, o cosseno e a tangente são definidos a partir das coordenadas de um ponto (x, y) sobre a circunferência do círculo trigonométrico, de modo que o ângulo tenha como lado origem o semieixo positivo Ox e como lado extremidade a semirreta que une a origem com o ponto P de coordenadas (x, y).

2.5 Introdução às Funções Trigonométricas

Definimos as razões trigonométricas para ângulos agudos e depois, com o apoio do círculo trigonométrico, ampliámos as razões trigonométricas para ângulos até 2π.

Consideremos agora ângulos de amplitude superior a 2π, com lado origem Ox.

O lado extremidade do ângulo $\alpha + 2\pi$ coincide com o lado extremidade do ângulo α, ou seja, as razões trigonométricas deverão assumir o mesmo valor para esses dois ângulos. Deste modo, ângulos que diferem de 2π deverão ter as mesmas razões trigonométricas. Logo, basta que se conheçam as razões trigonométricas de ângulos com amplitude entre 0 e 2π, para que se saiba determinar as razões de todos os outros ângulos.

Como a cada número real x corresponde um e um só número real y e um e um só z, tal que $y = \sin x$ e $z = \cos x$, as funções seno e cosseno são funções reais de variável real.

É possível definir uma função real de variável real do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{f} & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \rightarrow & \sin(x) \end{array}$$

à função f assim definida chamaremos *função seno*. Do mesmo modo é possível definir a *função cosseno*:

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \rightarrow & \cos(x) \end{array}$$

Como $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cos(x) \neq 0$, também a função tangente pode ser considerada uma função real de variável real, contudo, para a definir teremos que considerar apenas os ângulos para os quais este quociente tem significado, isto é, temos que encontrar o seu domínio.

2.5.1 Função seno

Consideremos a função $f(x) = \sin(x)$ cuja representação gráfica é a seguinte:

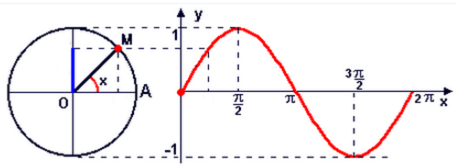

Figura 2.6: O gráfico da função seno em $[0, 2\pi]$

Ao deslocarmos o ponto M ao longo da circunferência, a curva descrita é a correspondente ao gráfico da função seno em $[0, 2\pi]$.

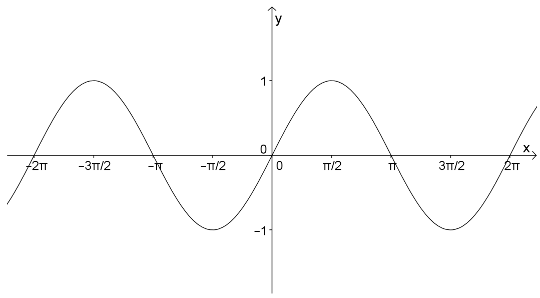

Figura 2.7: O gráfico da função seno em $\mathbb{R}$

Tem-se que:

- O domínio desta função é $\mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}$, pois a cada $x \in \mathbb{R}$ se pode associar o seu seno.

- O contradomínio desta função é $CD_f = [-1, 1]$, pelo que a função seno tem máximo igual a 1 e mínimo igual a -1.

- Os ângulos cujo seno é 1 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade coincidente com o semieixo positivo Oy, pelo que:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

  Assim sendo, a função seno atinge o máximo de valor 1, em $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Os ângulos cujo seno é -1 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade coincidente com o semieixo negativo Oy, pelo que:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

  Assim sendo, a função seno atinge o mínimo de valor -1, para $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- A função seno é periódica, com período 2π, isto é,

$$\sin(2\pi + x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

  (2π é o período positivo mínimo).

- A função seno é uma função ímpar, isto é,

$$\sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

  Pelo que o seu gráfico é simetrico relativamente à origem do referencial.

- A função seno é crescente nos intervalos

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right], \forall k \in \mathbb{Z}$$

  e decrescente nos intervalos

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right], \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Os ângulos cujo seno é 0 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade sobre o eixo Ox, pelo que $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, os zeros da função são da forma $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- A função seno é contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.

2.5.2 Função cosseno

Seja a função $g(x) = \cos(x)$ cuja representação gráfica é a seguinte:

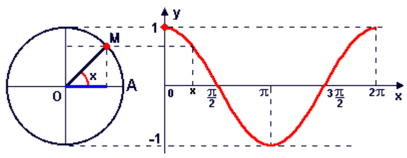

Figura 2.8: O gráfico da função cosseno em $[0, 2\pi]$

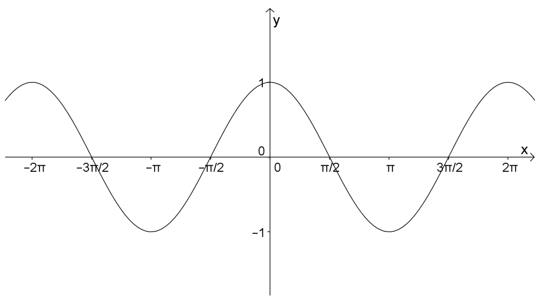

Figura 2.9: O gráfico da função cosseno em $\mathbb{R}$

Tem-se que:

- O domínio desta função é $\mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, pois a cada $x \in \mathbb{R}$ se pode associar o seu cosseno.

- O contradomínio desta função é $CD_g = [-1, 1]$, pelo que a função cosseno tem máximo igual a 1 e mínimo igual a -1.

- Os ângulos cujo cosseno é 1 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade coincidente com o semieixo positivo Ox, pelo que:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

assim sendo, a função cosseno atinge o máximo de valor 1, para $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Os ângulos cujo cosseno é -1 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade coincidente com o semieixo negativo Ox, pelo que:

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

assim sendo, a função cosseno atinge o mínimo -1, para $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- A função cosseno é periódica, com período 2π, isto é,

$$\cos(2\pi + x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

(2π é o período positivo mínimo).

- A função cosseno é uma função par, isto é,

$$\cos(-x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

pelo que o seu gráfico é simétrico, relativamente ao eixo Oy.

- A função cosseno é crescente nos intervalos

$$[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], \forall k \in \mathbb{Z}$$

e decrescente nos intervalos

$$[2k\pi, \pi + 2k\pi], \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Os ângulos cujo cosseno é 0 têm, no círculo trigonométrico, o lado extremidade sobre o eixo Oy, pelo que:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

logo, os zeros da função são da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- A função cosseno é contínua em $\mathbb{R}$, ou seja,$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

A função cosseno é uma translação da função seno, pois $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

2.5.3 Função tangente

Como já foi referido anteriormente, sendo $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ precisamos de determinar os pontos x onde $\cos x = 0$.

A função cosseno anula-se em $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e portanto a função tangente não está definida em nenhum desses pontos.

Assim sendo, a função $g(x) = \tan(x)$ é representada graficamente da seguinte forma:

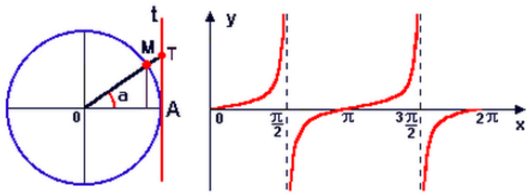

Figura 2.10: O gráfico da função tangente em $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

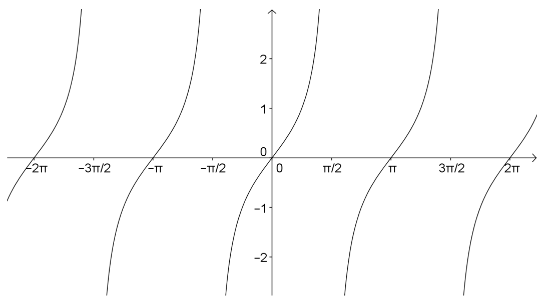

Figura 2.11: O gráfico da função tangente no seu domínio

Tem-se que:

- O domínio desta função é $D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ou seja para os ângulos que têm no circulo trigonométrico, lado extremidade no eixo Oy a tangente não está definida.

- O contradomínio desta função é $\mathbb{R}$, $CD_h = \mathbb{R}$, pelo que a função tangente não tem máximo nem mínimo, não é uma função limitada.

- A função tangente é periódica, com período π, isto é,

$$\tan(\pi + x) = \tan(x), \forall x \in D_h$$

  (π é o período positivo mínimo, pois $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

- A função tangente é uma função ímpar, isto é,

$$\tan(-x) = -\tan(x), \forall x \in D_h,$$

pelo que o seu gráfico é simétrico, relativamente à origem do referencial.

- A função tangente é crescente nos intervalos

$$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Os ângulos cuja tangente é 0 têm, no círculo trigonométrico, o lado extermidade sobre o eixo Ox, pelo que

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

logo, os zeros da função são da forma $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- A função tangente não é contínua em $\mathbb{R}$, mas é contínua em todo o seu domínio, isto é, em todos os intervalos do tipo:

$$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- A função tangente tem uma infinidade de assíntotas verticais, as retas de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, um vez que :

$$\lim_{x \to a^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} \tan x = -\infty$$

onde $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Capítulo 3

Implementação em Software

Neste capítulo vamos mostrar como se cria um exercício parametrizado em formato de escolha múltipla e apresentar alguns exercícios criados.

3.1 Como criar um exercício

Os exercícos são criados no Sage notebook [Sage notebook], utilizado no pacote MEGUA. Os exercícios são parametrizados, o que significa que no texto que descreve o exercício, o professor pode específicar alguns parâmetros, os quais são depois escolhidos aleatoriamente pelo computador de entre um conjunto de valores que o professor pré define.

Para criar um exercício usando o Sage e o pacote MEGUA devemos criar uma "worksheet" que deverá conter as seguintes linhas conforme a listagem 3.1.

```
from megua.all import *
meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")
# inicio de exercicio
meg.save(r'''
aqui o texto e a class python
''')
```

Listagem 3.1: Acesso à base de dados

A instrução `from megua.all import *` carrega o pacote MEGUA e as suas funções. Com `meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")` é aberta a base de dados que contém os exercícios criados no âmbito do mestrado em matemática para professores, edição 2013/2014.

Seguidamente podemos colocar um comentário indicando que o exercício vai começar. Por último `meg.save(r'''` grava o exercício descrito entre 3 plicas `'''` e as plicas seguintes.

Para criar um exercício parametrizado devemos seguir os passos ilustrados nas seguintes listagens.

```
%summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas;
 Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno
```

Listagem 3.2: Identicação dos conteúdos e classificação matemática universal do exercício

Primeiramente devemos enunciar os conteúdos matemáticos que o exercício contém, neste exemplo: funções reais de variável real, funções trigonométricas e a função cosseno. Seguidamente colocamos o código MSC [Mathematical Subject Classification (2013)] mais apropriado para o exercício, neste caso 97I20 Mappings and functions e Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions. Finalmente temos as palavras chave do exercício, nomedamente, neste exemplo, "funções trigonométricas", "cosseno".

O próximo bloco contém os parâmetros que são enviados para a aplicação Siacua, de modo a que a questão fique associada aos conceitos que envolve. Além disso possibilitam o cálculo das correspondentes probabilidades condicionadas no modelo Bayesiano do utilizador implementado nesta aplicação.

```
SIACUAstart
level=2;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts =  [(4431,0.4), (4432,0.6)]
SIACUAend
```

Listagem 3.3: Parâmetros enviados para a aplicação Siacua

O parâmetro “concepts” é uma lista de pares de números, onde em cada par, o primeiro número é o código de um conceito, e o segundo número é o peso do conceito na questão. Assim, a soma dos segundos números de todos os pares é sempre igual a 1. Neste exemplo, a importância do conceito 4431 na questão é 40% e a importância do conceito 4432 é 60%.

O parâmetro “level” é o nível de dificuldade da questão, que está entre 1 e 5. O parâmetro “slip” representa a probabilidade de o aluno se enganar a responder à questão, assumindo que tem conhecimento sobre todos os conceitos que a questão envolve. O parâmetro “guess” representa a probabilidade de o aluno adivinhar a resposta, ou seja, de acertar respondendo ao acaso sem saber nenhum dos conceitos que a questão envolve. O parâmetro “guess” é assim igual a 0,5 nas questões de verdadeiro/falso e é igual a 0,25 nas questões para escolher uma de quatro opções. Estes três parâmetros, conjuntamente com o parâmetro “discr” (o fator de discriminação da questão), são utilizados para calcular as probabilidades condicionadas associadas à questão. Neste exemplo, a aplicação Siacua pode, utlizando estes quatro parâmetros, calcular a probabilidade de o aluno acertar na questão, supondo que tem conhecimento sobre o conceito 4431 e não tem conhecimento no conceito 4432, por exemplo. Em geral, se a questão envolve n conceitos, as 2^n probabilidades condicionadas são calculadas a partir destes pesos e destes quatro parâmetros. Este cálculo é feito com base no modelo Bayesiano do utilizador proposto por Millán e Pérez [Millán, E. e Pérez de la Cruz, J. L. (2002)].

Consideremos, o enunciado do exercício escrito em *HTML* e as fórmulas na linguagem tipográfica LaTeX:

```
O contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por
 $f(x)= a1+\cos{(b1x)}$ é
<multiplechoice>
<choice>
 <center> $CD_f=[int1a,int1b]$   </center>
</choice>
<choice>
 <center> $CD_f=[int2a, int2b]$   </center>
</choice>
```

```
<choice>
 <center> $CD_f=[int3a, int3b]$   </center>
</choice>
<choice>
 <center> $CD_f=[int4a, int4b]$   </center>
</choice>
</multiplechoice>
```

Listagem 3.4: Texto LaTeX de um problema.

Note-se que, inicialmente se escreve o enunciado com os parâmetros, neste caso, o enunciado é "O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = a1 + \cos(b1x)$ é" e os parâmetros são `a1` e `b1`. Seguidamente elaboraram-se as quatro opções de escolha múltipla, com a opção correta na primeira posição.

Na próxima lista apresentamos a resolução detalhada do exercício parametrizado:

```
A função $\cos{x}$ tem por domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1,1]$.
Como a função definida por  $(b1x)$ tem  domínio $\mathbb{R}$,
 a função $\cos{(b1x)}$ tem
por contradomínio  $[-1,1]$.
Então,
$$-1 \le \cos{(b1x)} \le 1$$
e, portanto,
$$int1a \le a1+\cos{(b1x)} \le int1b$$
Logo, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[int1a, int1b]$
```

Listagem 3.5: Resolução detalhada do exercício.

Posteriormente, devemos colocar o nome da classe que é o nome dado ao exercício:

```
class E33B10_jp_trigonometria_001(Exercise):
```

Listagem 3.6: Nome do exercício

O nome deste exercício é `E33B10_jp_trigonometria_001`, em que E33B10 designa o código MSC (Mathematical Subject Classification (2013)) mais apropriado para o exercício, como já referimos anteriormente.

Segue-se, a funçao `make_random` onde são definidos os parâmetros e respetivos domínios que ocorrem no texto na parte do enunciado do problema.

```
def make_random(s):
        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x
```

Listagem 3.7: Atribuição de valores aos parâmetros usando o Python/Sagemath.

Em relação a esta função observa-se o seguinte:

- Inicialmente, define-se a variável, neste caso a variável é o x.
- `s.a1` e `s.b1` são os valores dos parâmetros `a1` e `b1` que ocorrem no texto.
- O `s.` designa que os parâmetros pertencem ao exercício e não são variáveis locais que iriam desaparecer.
- Neste exemplo, é utilizada a função `ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])` , a qual escolhe um número inteiro entre "-20"e "20", excluindo o "0"
- Foi definida a variável auxiliar `s.b1x=s.b1*x`, para não voltar a escrever esta expressão em LaTeX.
- Pode ser útil que o nome da variável tenha um número associado para melhor identificação e para distinguir as palavras correntes da língua portuguesa.

Por último, temos a funçao `solve(s)`, onde os parâmetros que ocorrem na parte da resposta ("answer") tomam valores calculados com base nos parâmetros escolhidos na parte do problema.

```
def solve(s):
        s.int1a = s.a1-1
        s.int1b = s.a1 +1
        s.int2a = s.a1 -2
        s.int2b = s.a1 +2
        s.int3a = s.a1 -3
        s.int3b = s.a1 +3
```

```
        s.int4a = s.a1 -4
        s.int4b = s.a1 +4
```

Listagem 3.8: Parâmetros que ocorrem na parte da resposta usando o Python/Sagemath.

Os parâmetros `s.int1a` e `s.int1b`, são os parametros que figuram na opção correta. Os outros parâmetros servem para definir as outras opções, tendo sempre em conta que não pode haver mais nenhuma correta.

Para finalizar apresentamos uma concretização do exercício parametrizado, apresentado anteriormente:

Enunciado 1:

O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 + \cos(-17x)$ é

- Escolha A $CD_f = [-10, -8]$
- Escolha B $CD_f = [-11, -7]$
- Escolha C $CD_f = [-12, -6]$
- Escolha D $CD_f = [-13, -5]$

Neste primeiro exemplo, os valores dos parâmetros são $a1 = -9$ e $b1 = -17$.

Proposta de resolução:

A função $\cos x$ tem por domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 1]$. Como a função definida por $(-17x)$ tem domínio $\mathbb{R}$, a função $\cos(-17x)$ tem por contradomínio $[-1, 1]$. Então,

$$-1 \leq \cos(-17x) \leq 1$$

e, portanto,

$$-10 \leq -9 + \cos(-17x) \leq -8$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-10, -8]$

Na seguinte figura, apresento o exercício conforme aparece na aplicação Siacua:

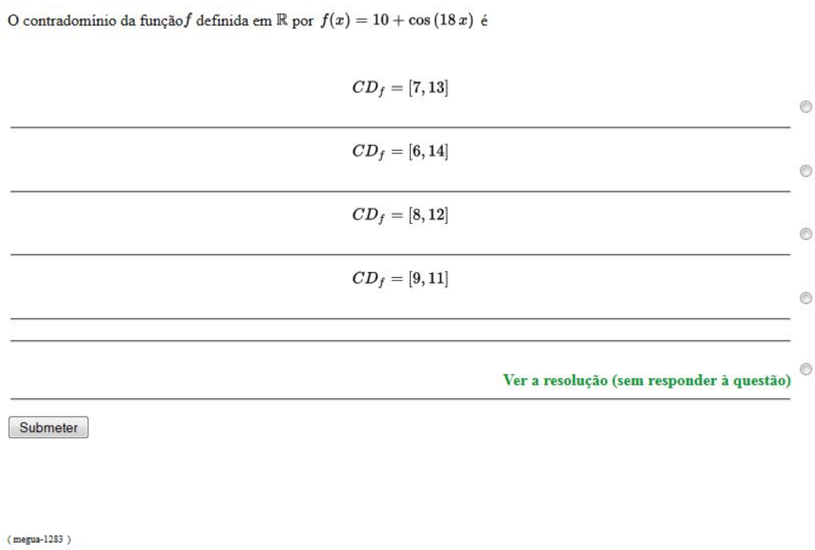

Figura 3.1: Exercício no Siacua

Um outro enunciado do mesmo exercício, mas com parâmetros $a1 = 10$ e $b1 = -15$ é

Enunciado 2:

O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 10 + \cos(-15x)$ é

- Escolha A $CD_f = [9, 11]$
- Escolha B $CD_f = [8, 12]$
- Escolha C $CD_f = [7, 13]$
- Escolha D $CD_f = [6, 14]$

Este enunciado apresentado tem uma proposta de resolução similar à apresentada para o primeiro exemplo.

As expressões matemáticas foram definidas em LaTeX. Assim, por exemplo:

- `\mathbb{R}` escreve $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais e `\sqrt{...}` escreve a raiz quadrada de um número.
- `\frac{A}{B}` escreve a fração cujo numerador é A e o denominador é B.
- `\le`, `\vee`, `\in`, `\Leftrightarrow` e `\forall` escrevem os símbolos $\leq$, $\vee$, $\in$, $\Leftrightarrow$ e $\forall$, respetiva-

mente.

- `\alpha` e `\beta` são letras gregas
- `\cos{...}`, `\sin{...}`, `\tan{...}` são as funções trigonométricas utilizadas.
- `\left\{` e `\right\}` adapta à esquerda ou à direita o tamanho de "{".
- `\ifstrequal{variável}{A}{P}{Q}` Se *variável* toma o valor A escreve o texto P, senão escreve o texto Q.
- `\quad` e `\qquad` , criam um espaço pequeno ou médio entre as palavras, respetivamente.

O cálculo dos parâmetros é feito no Python/SAGE usando algumas das funções da biblioteca. As mais usadas foram:

- `min(A, B)` e `max(A, B)` devolve o mínimo e o máximo dos valores A e B.
- `ceil(A)`, `floor(A)`, `int(A)` e `round(A,2)` devolve os seguintes valores de A respetivamente, por excesso, por defeito, a parte inteira e um valor aproximado com 2 casas decimais.
- `sin( )`, `cos( )`, `tan( )`, `asin( )`, `acos( )` e `atan( )` calcula o valor das funções seno, cosseno e tangente, assim como, das funções inversas arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente.

Na parte da programação apenas foram utilizados os comandos `if ... else ...`.

Funções usadas do pacote MEGUA

- `ur.iunif(a, b)`: seleciona aleatoriamente um inteiro de a a b.
- `ur.iunif_nonset(a, b, [...])`: seleciona um inteiro de a a b com exceção dos valores em [...].
- `ur.squnif()`: seleciona aleatoriamente um racional duma lista predefinida.
- `variável@c{lista de palavras}` Se a variável for '0' devolve a primeira palavra da lista e assim sucessivamente
- `s.ordered_set(lista)` que faz aparecer uma lista sob a forma de conjunto com {...} removendo as soluções em duplicado e ordenando-as.

3.2 Exercícios criados

Nesta secção serão apresentados alguns dos exercícios que foram elaborados, assim como, uma breve descrição de cada um deles. Começamos por apresentar alguns enunciados de exercícios, conjuntamente com a sua resolução. Alguns dos exercícios foram criados a partir dos exercícios da dissertação de I. Rocha [Rocha, I. (2013)].

Note-se que cada exercício gera uma panóplia de enunciados, bastando para isso alterar os valores dos parâmetros, o que é feito automaticamente pelo computador.

Temos o seguinte exerccício, sobre o período da função seno:

Exercício E33B10 jp trigonometria 003:

Pretende-se estudar o período de uma função do tipo $f(x) = a1 + b1\sin(c1x)$.

Enunciado 3:

Qual é o período da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 14\sin(16x) - 17$?

- Escolha A $p = \frac{\pi}{8}$
- Escolha B $p = \frac{\pi}{16}$
- Escolha C $p = \frac{3\pi}{16}$
- Escolha D $p = \frac{\pi}{4}$

Neste exemplo, os valores dos parâmetros são $a1 = -17$, $b1 = 14$ e $c1 = 16$.

Proposta de resolução:

O período de uma função periódica é o menor número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo o $x \in D_f$. Neste caso,

$$14\sin(16p + 16x) - 17 = 14\sin(16x) - 17$$

Como a função seno é uma função periódica de período 2π, temos $16p = 2\pi$, portanto, $p = \frac{\pi}{8}$. Assim, o período da função f é $p = \frac{\pi}{8}$.

Segue-se um exercício sobre os zeros da função seno:

Exercício E33B10 jp trigonometria 005:

Pretende-se estudar os zeros de uma função do tipo $f(x) = a1 \sin(b1x + c1) + d1$.

Enunciado 4:

Considere a função definida por $f(x) = -2\sin(x-4) + \sqrt{3}$. Indique todos os zeros da função f.

- Escolha A $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k + 4 \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k + 4, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha B $x = \frac{\pi}{3} + \pi k + 4 \vee x = \frac{2\pi}{3} + \pi k + 4, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha C $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k + 2 \vee x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k + 2, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha D $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Neste exemplo, os valores dos parâmetros são $a1 = -2$, $b1 = 1$, $c1 = -4$ e $d1 = \sqrt{3}$.

Proposta de resolução:

Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sin(x-4) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(x-4) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x-4) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Temos que

$$\sin(x-4) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \Leftrightarrow x - 4 = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee x - 4 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Então,

$$x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi + 4 \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi + 4,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Segue-se mais um exercício com a função seno, agora para determinar o domínio:

Exercício E33B10 jp trigonometria 0011:

Pretende-se estudar o domínio de uma função do tipo $f(x) = a1 \sin(b1x + c1) + d1$.

Enunciado 5:

Qual é o domínio da função definida por $f(x) = -2\sin(-2x-2)+2$?

- Escolha A $D = \mathbb{R}$
- Escolha B $D = [-1, 1]$
- Escolha C $D = \mathbb{R}^+$
- Escolha D $\mathbb{R}^-$

Neste exemplo, os valores dos parâmetros são $a1 = -2$, $b1 = -2$, $c1 = -2$ e $d1 = 2$.

Proposta de resolução:

O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -2x-2$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

No seguinte exercício em que ocorrem as funções seno e cosseno pretende-se estudar a paridade de uma função:

Exercício E33B10 jp trigonometria 0014:

Pretende-se estudar a paridade de uma função do tipo $f(x) = \sin^2(a1x) + \cos(b1x) + c1$.

Enunciado 6:

Seja f a função definida por $\sin^2(8x) + \cos(8x) + 2$. A função f

- Escolha A é par
- Escolha B é ímpar
- Escolha C é par e ímpar
- Escolha D não é par, nem é ímpar

Neste exemplo, os valores dos parâmetros são $a1 = 8$, $b1 = 8$ e $c1 = 2$.

Proposta de resolução:

Calculemos $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin^2(-8x) + \cos(-8x) + 2$$

como $\cos(-x) = \cos(x)$, pois a função cosseno é uma função par e a função seno, apesar de ser ímpar está elevada ao quadrado (portanto, $\sin^2(8x) = \sin^2(-8x)$), resulta que

$$f(-x) = \sin^2(8x) + \cos(8x) + 2 = f(x)$$

Logo, a função f é uma função par.

Temos seguidamente um exercício sobre máximos e mínimos com a função cosseno:

Exercício E33B10 jp trigonometria 0019:
Pretende-se estudar o máximo e o mínimo de uma função do tipo $g(x) = c1 \cos^2(d1x)$.

Enunciado 7:

Considere a expressão $-9\cos^2(-17x)$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A -9 e 0
- Escolha B -8 e 1
- Escolha C -7 e 2
- Escolha D -6 e 1

Neste exemplo, os valores dos parâmetros são $c1 = -9$ e $d1 = -17$.

Proposta de resolução:

Sabemos que o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $[-1, 1]$. A função $f(x) = \cos^2(-17x)$ tem por domínio $\mathbb{R}$ mas contradomínio $[0, 1]$, já que o cosseno está elevado ao quadrado:

$$0 \leq \cos^2(-17x) \leq 1$$

Assim,

$$-9 \leq -9\cos^2(-17x) \leq 0$$

Então -9 e 0 são os valores mínimo e máximo da função $g(x) = -9\cos^2(-17x)$, respetivamente.

Seguidamente, apresento apenas os enunciados dos restantes exercícios criados. As respetivas resoluções podem ser consultadas no anexo.

Exercício E33B10 jp trigonometria 002:

Pretende-se estudar o contradomínio de uma função do tipo $f(x) = a1 + \sin(b1x)$.

O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -17 + \sin(14x)$ é

- Escolha A $CD_f = [-18, -16]$
- Escolha B $CD_f = [-19, -15]$
- Escolha C $CD_f = [-20, -14]$
- Escolha D $CD_f = [-21, -13]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 004:

Pretende-se estudar o domínio de uma função do tipo $f(x) = a1 + b1\cos(c1x)$.

O domínio da função definida por $f(x) = -17 + 14\cos(16x)$ é

- Escolha A $D_f = \mathbb{R}$
- Escolha B $D_f = [-1, 1]$
- Escolha C $CD_f = \mathbb{R}^+$
- Escolha D $CD_f = \mathbb{R}^-$

Exercício E33B10 jp trigonometria 004:

Pretende-se estudar o domínio de uma função do tipo $f(x) = a1 + b1\cos(c1x)$.

O domínio da função definida por $f(x) = -17 + 14\cos(16x)$ é

- Escolha A $D_f = \mathbb{R}$
- Escolha B $D_f = [-1, 1]$
- Escolha C $CD_f = \mathbb{R}^+$
- Escolha D $CD_f = \mathbb{R}^-$

Exercício E33B10 jp trigonometria 007:

Pretende-se estudar a paridade de uma função do tipo $f(x) = a1\sin(b1x + c1) + d1$.

Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{2} + 2\sin(-3x + 4)$. Pode-se afirmar que

- Escolha A A função não é par nem é ímpar.
- Escolha B A função é par.
- Escolha C A função é ímpar.
- Escolha D A função é par e ímpar.

Exercício E33B10 jp trigonometria 008:

Pretende-se estudar os zeros de uma função do tipo $f(x) = a1\sin(b1x + c1) + d1$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\sin(x - 4) - \sqrt{2}$$

Quais são os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$?

- Escolha A $\{-\frac{3}{4}\pi + 4, -\frac{1}{4}\pi + 4\}$
- Escolha B $\{-\frac{1}{4}\pi + 4\}$
- Escolha C $\{-\frac{3}{4}\pi + 4\}$
- Escolha D $\{-\frac{3}{4}\pi + 4, -\frac{5}{4}\pi\}$

Exercício E33B10 jp trigonometria 009:

Pretende-se estudar o contradomínio de uma função do tipo $f(x) = a1 - \cos^2(b1x)$.

Qual é o contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 - \cos^2(-17x)$?

- Escolha A $[-10, -9]$
- Escolha B $[-9, -8]$
- Escolha C $[-8, -7]$
- Escolha D $[-7, -6]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0010:

Pretende-se estudar o contradomínio de uma função do tipo $f(x) = a1 - \sin^2(b1x)$.

Qual é o contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 - \sin^2(-17x)$?

- Escolha A $[-10, -9]$
- Escolha B $[-9, -8]$
- Escolha C $[-8, -7]$
- Escolha D $[-7, -6]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0012:

Pretende-se estudar o contradomínio de uma função do tipo $f(x) = a1 \sin(b1x + c1) + d1$.

Considere a função definida por $f(x) = -2\sin(-2x - 2) + 2$ Qual é o seu contradomínio?

- Escolha A $[0, 4]$
- Escolha B $[1, 5]$
- Escolha C $[2, 6]$
- Escolha D $[3, 7]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0013:

Pretende-se estudar o período de uma função do tipo $f(x) = a1 \sin(b1x + c1) + d1$.

O período da função definida por $f(x) = -2sin(-2x-2)+2$ é

- Escolha A π
- Escolha B $\frac{1}{2}\pi$
- Escolha C $\frac{3}{2}\pi$
- Escolha D 1

Exercício E33B10 jp trigonometria 0015:

Pretende-se estudar o valor exato de uma função do tipo $f(x) = \sin^2(a1x) + \cos(b1x) + c1$ num dado ponto.

Seja f a função definida por $\sin^2(6x)+\cos(6x)+2$. Qual é o valor exato de $f\left(\frac{1}{6}\pi\right) - f(-\pi)$?

- Escolha A -2
- Escolha B -1
- Escolha C -3
- Escolha D -4

Exercício E33B10 jp trigonometria 0016:

Pretende-se estudar a resolução de equações do tipo $f(x) = \cos(b1x) + c1$, no intervalo $[-\pi, \pi[$.

Seja f a função definida por $\sin^2(6x)+\cos(6x)+2$. Quais os valores de x no intervalo $[-\pi, \pi[$ que satisfazem a equação $f(x) = \cos(6x) + 2$?

- Escolha A $\{-\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\}$
- Escolha B $\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi\}$
- Escolha C $\{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi\}$
- Escolha D $\{-\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0018:

Pretende-se estudar o máximo e o mínimo de uma função do tipo $f(x) = h1\sin^2(a1x) - b1$.

Considere a expressão $15\sin^2(-9x) - 4$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A -4 e 11.
- Escolha B -4 e 12.
- Escolha C -2 e 12.
- Escolha D -1 e 13.

Exercício E33B10 jp trigonometria 0020:
Pretende-se estudar o máximo e o mínimo de uma função do tipo $f(x) = \dfrac{\cos^2(e1x)}{f1} - g1$.

Considere a expressão $\dfrac{\cos^2(-9x)}{5} - 2$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A $-\frac{9}{5}$ e 0 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha B $-\frac{4}{5}$ e 1 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha C $\frac{1}{5}$ e 2 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha D $\frac{6}{5}$ e 3 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.

Capítulo 4

Conclusões

O objetivo principal deste projeto foi construir recursos digitais de auxílio ao ensino das funções trigonométricas, criando materiais úteis para os alunos que desta forma poderiam autoavaliar os conteúdos e saberes adquiridos.

Um desafio deste projeto foi a criação de exercícios de escolha múltipla subordinado ao tema das funções trigonométricas. É de salientar que todos estes exercícios dão aos alunos a possibilidade de testarem e evoluírem nas suas aprendizagens através de uma plataforma informática sem auxílio docente. Desta forma, substituem-se os habituais livros de exercícios e mergulha-se na era das novas tecnologias que indiscutivelmente se têm revelado tão importantes e atrativas no processo de ensino/aprendizagem.

Uma enorme vantagem de todo este trabalho, fundamentalmente para os alunos, é possibitar-lhes uma resolução detalhada de todos os exercícios com os passos minuciosamente explicados. Para o professor, todo este material é igualmente valioso pois pode obter exercícios diferentes para todos os alunos. Paralelamente, o professor deverá introduzir na resolução alguns dos conceitos teóricos do tópico em estudo, uma vez que os alunos não são muito entusiastas no que concerne à leitura de manuais escolares. Sabemos que os nossos alunos, hoje em dia, estão cada vez mais próximos e envolvidos nas novas tecnologias. Ao disponibilizar e divulgar estes recursos na internet, evita-se que os alunos utilizem alguma informação não adequada e frequentemente incorreta.

Com esta ferramenta é possível criar uma rede de partilha entre docentes, podendo estes desenvolver conteúdos e colocá-los on-line numa plataforma de e-learning. Desta forma, os alunos podem ter acesso aos conteúdos num ambiente mais motivador e desafiante.

Os exercícios criados, nesta fase, já estão disponiveis na plataforma SIACUA e podem ser utilizados. A sua versatilidade permite um qualquer grau de exigência, bastando para isso uma escolha adequada dos parâmetros.

Esta dissertação não reflete todo o trabalho desenvolvido, mas apresenta uma descrição dos procedimentos e métodos que nos levaram à construção desta base de dados de exercícios, podendo servir de modelo para criações futuras.

No capítulo 2, sobre a descrição das funções trigonométricas, foi usado o software *Geogebra*, versão 4.2, para traçar os gráficos, que foram depois exportados para LaTeX e, por vezes, manipulados no próprio LaTeX. Uma das vantagens das concretizações em LaTeX é que permite a um utilizador alterar o texto, adaptando-o à sua forma de resolver o mesmo exercício sem precisar de possuir conhecimentos de programação. Este trabalho ainda não está completo, pois podem-se criar muitos mais exercícios e o próprio software, poderá um dia servir para o professor efetuar avaliações na sua disciplina.

Da mesma forma, gostaríamos, futuramente, de divulgar esta ferramenta junto da classe docente, para que fosse possível criar uma rede de colaboradores onde cada um contribuísse com diferentes conteúdos para os diferentes anos letivos, para que fosse possível, desta forma, cobrir todo o programa e metas curriculares do ensino da matemática.

Desenvolver este projeto foi um desafio que senti, enquanto docente, para o meu enriquecimento pessoal e profissional. Esta foi a primeira vez que desenvolvi uma investigação com esta intensidade e duração. A tarefa, que no início me parecia complicada e complexa, acabou por ser muito interessante e motivadora.

Bibliografia

[Camilo, H. e Silva, J. (2008)] Camilo, H. e Silva, J., *Os testes de escolha múltipla (TEM).* Essências Educare, Departamento de Educação Médica da Faculdade de Medicina, Universidade de Coimbra, 2008.

[Garcia, A. e Cunha, L. (2000)] Garcia, A. e Cunha, L. , *Avaliação em Instrução Baseada na Web*, PUC-RioInf.MCC31/00, 2000.

[Loureiro, I. (2008)] Loureiro, I., *A Aprendizagem baseada na resolução de problemas e a formulação de questões a partir de contextos problemáticos: Um estudo com professores e alunos de Física e Química. Dissertação de mestrado.* Universidade do Minho, 2008.

[Mathematical Subject Classification (2013)] Mathematical Subject Classification, *Mathematical Subject Classification 2013* `http://www.ams.org/mathscinet/msc/`.

[Megua] Mathematics Exercise Generator, Universidade de Aveiro (Megua), `http://cms.ua.pt/megua/`.

[Megua & Siacua (2013)] Megua & Siacua, Recursos digitais e estudo autónomo, *Inovação Pedagógica na Universidade de Aveiro, Teaching Day - 2ª edição*, 27 de novembro de 2013

[Millán, E. e Pérez de la Cruz, J. L. (2002)] Millán, E. e Pérez de la Cruz, J. L., *A Bayesian diagnostic algorithm for student modeling. User Modeling and User-Adapted Interaction, 12, 281-330*, 2002.

[Nunziati, G. (1990)] Nunziati, G., *Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice.* Cahiers Pédagogiques, 280, 47-62, 1990.

[Pacheco, J. e outros (1998)] Pacheco, J., Paraskeva, J., Silva, A., *Reflexão e Inovação Curricular: atas do Colóquio sobre Questões Curriculares, 3. Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia.* Universidade do Minho, 202, 1998.

[Pinto, A. (2001)] Pinto, A., *Factores relevantes na avaliação escolar por perguntas de escolha múltipla. Psicologia, Educação e Cultura, 5 (1), 23-44*, 2001.

[Pires, S. (2009)] Pires, S., *As TIC no currículo escolar.* EDUSER: revista de educação, Volume 1 (1), 2009.

[Ponte, J. (1994)] Ponte, J., *O projeto Minerva: introduzindo as NTI na educação em Portugal.* Lisboa: Departamento de Programação e Gestão Financeira do Ministério da Educação, 1994.

[Ponte, J. (1997)] Ponte, J., *A família em rede: ultrapassando a barreira digital entre gerações.* Lisboa: Relógio D'água, 1997.

[Ponte, J. e Oliveira, H. (2000)] Ponte, J. e Oliveira, H., *A Internet como recurso para o ensino da matemática.* NOESIS, 55, 41-5, 2000.

[PTE (2007)] Plano Tecnológico da Educação (2007), *Plano Tecnológico da Educação* `http://www.pte.gov.pt/pte/PT/OPTE/index.htm`.

[Ricoy, M. e Couto, M. (2012)] Ricoy, M. e Couto, M., *Os resursos educativos e a utilização das TIC no Ensino Secundário da Matemática.* Revista Portuguesa de Educação, 25(2), 241-262, 2012.

[Rocha, I. (2013)] Rocha, I., *Mergulhar nas funções trigonométricas. Dissertação de mestrado.* Universidade de Aveiro, 2013.

[Sage notebook] Sage notebook, `http://www.sagemath.org.`.

[Siacua] Sistema Interativo de Aprendizagem, Universidade de Aveiro (Siacua), `http://siacua.web.ua.pt/`.

[Silva, J. (1994)] Silva, J., *Princípios de Análise Matemática Aplicada.* McGRAW-HILL, 1994.

[Silva, A. (2004)] Silva, A., *Ensinar e aprender com as Tecnologias: Um estudo sobre as atitudes, formação, condições de equipamento e utilização nas escolas do 1º Ciclo do Ensino Básico do Concelho de Cabeceiras de Basto. Dissertação de mestrado.* Universidade do Minho, 2004.

[Struik, D. (1997)] Struik, D., *História Concisa das Matemáticas.* Gradiva, 1997.

[Wragg, E. e Brown, G. (2001)] Wragg, E. e Brown, G., *Questioning in the secondary school.* Londres: Routledge Falmer, 2001.

[Zbiek, R. e outros (2007)] Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., e Dick, T. P., *Research on technology in mathematics education: a perspective of constructs. In Frank K. Lester (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (Vol. II, pp. 1169-1207).* Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

Anexos

Listagem dos exercícios criados

Apresentamos de seguida todos os exercícios criados com as várias componentes: sumário, enunciado do problema, resolução e a classe Python, assim como, uma concretização e respetiva resolução.

Exercício E33B10 jp trigonometria 001

```
meg.save(r'''

%summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno

SIACUAstart
level=2;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%problem A função cosseno

O contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)= a1+\cos{(b1x)}$ é

%answer

<multiplechoice>
<choice>
```

```
 <center> $CD_f=[int1a,int1b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int2a, int2b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int3a, int3b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int4a, int4b]$   </center>

</choice>

</multiplechoice>

A função $\cos{x}$ tem por domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1,1]$.
Como $(b1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, a função $\cos{(b1x)} $ tem por
 contradomínio  $[-1,1]$. Então,
$$-1 \le \cos{(b1x)} \le 1$$
e, portanto,
$$int1a \le a1+\cos{(b1x)} \le int1b$$
Logo, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[int1a, int1b]$

class E33B10_jp_trigonometria_001(Exercise):
```

```
    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x

    def solve(s):

        s.int1a = s.a1 -1
        s.int1b = s.a1 +1
        s.int2a = s.a1 -2
        s.int2b = s.a1 +2
        s.int3a = s.a1 -3
        s.int3b = s.a1 +3
        s.int4a = s.a1 -4
        s.int4b = s.a1 +4

''')
```

Enunciado 1:

O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 + \cos(-17x)$ é

- Escolha A $CD_f = [-10, -8]$
- Escolha B $CD_f = [-11, -7]$
- Escolha C $CD_f = [-12, -6]$
- Escolha D $CD_f = [-13, -5]$

Proposta de resolução:

A função $\cos x$ tem por domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 1]$. Como $(-17x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, a função $\cos(-17x)$ tem por contradomínio $[-1, 1]$. Então,

$$-1 \leq \cos(-17x) \leq 1$$

e, portanto,

$$-10 \leq -9 + \cos(-17x) \leq -8$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-10, -8]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 002 Neste exercício tanto pode ser escolhida a função seno como a função cosseno usando o comando `<showone>`.

```
meg.save(r'''

%summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno

SIACUAstart
level=3;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%problem A função cosseno ou seno

<showone selecionar>
<thisone>
O contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)= a1+\cos{(b1x)}$ é
</thisone>
<thisone>
O contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)= a1+\sin{(b1x)}$ é
</thisone>
</showone>
```

```
%answer

<multiplechoice>
<choice>

 <center> $CD_f=[int1a,int1b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int2a, int2b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int3a, int3b]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[int4a, int4b]$   </center>

</choice>

</multiplechoice>

Sabemos que o domínio da função <showone selecionar>
<thisone>
cosseno
```

```
</thisone>
<thisone>
seno
</thisone>
</showone>
é $\mathbb{R}$ e o respetivo contradomínio é $[-1,1]$.
Como $(b1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, vem que

<showone selecionar>
<thisone>
$$-1 \le \cos{(b1x)} \le 1$$
</thisone>
<thisone>
$$-1 \le \sin{(b1x)} \le 1$$
</thisone>
</showone>

<showone selecionar>
<thisone>
$$int1a \le a1+\cos{(b1x)} \le int1b$$
</thisone>
<thisone>
$$int1a \le a1+\sin{(b1x)} \le int1b$$
</thisone>
</showone>

Logo, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[int1a, int1b]$

class E33B10_jp_trigonometria_002(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var(’x’)
```

```
        s.selecionar = ur.iunif(0,1)

        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])

        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])

        s.b1x=s.b1*x



    def solve(s):


        s.int1a = s.a1-1

        s.int1b = s.a1 +1

        s.int2a = s.a1 -2

        s.int2b = s.a1 +2

        s.int3a = s.a1 -3

        s.int3b = s.a1 +3

        s.int4a = s.a1 -4

        s.int4b = s.a1 +4

''')
```

Enunciado:

O contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -17 + \sin(14x)$ é

- Escolha A $CD_f = [-18, -16]$
- Escolha B $CD_f = [-19, -15]$
- Escolha C $CD_f = [-20, -14]$
- Escolha D $CD_f = [-21, -13]$

Proposta de resolução:

Sabemos que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o respetivo contradomínio é $[-1, 1]$. Como $(14x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, vem que

$$-1 \leq \sin(14x) \leq 1$$

$$-18 \leq -17 + \sin(14x) \leq -16$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-18, -16]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 003

```
meg.save(r'''

%summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno


97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions


Também pode ser 26A09 Elementary functions


Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno


SIACUAstart
level=3;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend


%problem A função cosseno ou seno


<showone selecionar>
<thisone>
Qual é o período da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)= f11$?
</thisone>
<thisone>
Qual é o período da função$f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)= f12$?
</thisone>
</showone>


%answer
```

```
<multiplechoice>
<choice>

 <center> $\displaystyle {\rm p}=p1$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $\displaystyle{\rm p}=p1e1$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $\displaystyle{\rm p}=p1e2$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $\displaystyle{\rm p}=p1e3$   </center>

</choice>

</multiplechoice>

O período de uma função periódica é o menor número positivo $p$
 tal que $f(x+p)=f(x)$, para todo o $x \in D_f$. Neste caso,
<showone selecionar>
<thisone>
$$f11p=f11$$
```

```
</thisone>
<thisone>
$$f12p=f12$$
</thisone>
</showone>

Como a  função <showone selecionar>
<thisone>
cosseno
</thisone>
<thisone>
seno
</thisone>
</showone>
 é uma função periódica de período $2\pi$, temos $|c1p|=2\pi$,
  portanto, $\displaystyle p=p1$.

Assim, o período da função $f$ é $\displaystyle p1$.

class E33B10_jp_trigonometria_003(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.selecionar = ur.iunif(0,1)
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.c2 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.f11=s.a1+ s.b1*cos(s.c1*x)
        s.f12=s.a1+ s.b1*sin(s.c1*x)
```

```
    def solve(s):

        p = var('p')
        s.c1p=s.c1*p
        s.p1=2*pi/abs(s.c1)
        s.p1e1=pi/abs(s.c1)
        s.p1e2=3*pi/abs(s.c1)
        s.p1e3=4*pi/abs(s.c1)
        s.f11p=s.a1+ s.b1*cos(s.c1*(x+p))
        s.f12p=s.a1+ s.b1*sin(s.c1*(x+p))

''')
```

Enunciado 3:

Qual é o período da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 14\sin(16x) - 17$?

- Escolha A $p = \frac{\pi}{8}$
- Escolha B $p = \frac{\pi}{16}$
- Escolha C $p = \frac{3\pi}{16}$
- Escolha D $p = \frac{\pi}{4}$

Proposta de resolução:

O período de uma função periódica é o menor número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo o $x \in D_f$. Neste caso,

$$14\sin(16p + 16x) - 17 = 14\sin(16x) - 17$$

Como a função seno é uma função periódica de período 2π, temos $|16p| = 2\pi$, portanto, $p = \frac{\pi}{8}$. Assim, o período da função f é $p = \frac{\pi}{8}$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 004

```
meg.save(r'''
```

%summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função coseno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; coseno

SIACUAstart

level=1; slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3

concepts = [(4432,1)]

SIACUAend

%problem A função seno

O domínio da função definida por $f(x)= f11$ é

%answer

<multiplechoice>

<choice>

 <center> $D_f = \mathbb{R}$ </center>

</choice>

<choice>

 <center> $D_f = [-1 , 1]$ </center>

</choice>

```
<choice>

 <center> $D_f= \mathbb{R}^+$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $D_f= \mathbb{R}^-$   </center>

</choice>

</multiplechoice>

Como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e
o domínio da função $c1x$ também é $\mathbb{R}$,
podemos afirmar que  o domínio de $f$ é  $\mathbb{R}$.

class E33B10_jp_trigonometria_004(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.selecionar = ur.iunif(0,1)
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.c2 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.f11=s.a1+ s.b1*cos(s.c1*x)



    def solve(s):
```

```
        pass

''')
```

Enunciado4:

O domínio da função definida por $f(x) = -17 + 14cos(16x)$ é

- Escolha A $D_f = \mathbb{R}$
- Escolha B $D_f = [-1, 1]$
- Escolha C $CD_f = \mathbb{R}^+$
- Escolha D $CD_f = \mathbb{R}^-$

Proposta de resolução: Como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o domínio da função $16x$ também é $\mathbb{R}$, podemos afirmar que o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 005

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

SIACUAstart
level=3;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend
```

```
%PROBLEM A função seno
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$
Indique todos os zeros da função $f$.

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>

 <center>
 <showone trig1>
<thisone>
$$x=x8, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
<thisone>
$$x=x8\quad \vee \quad x=x9, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
</showone>
   </center>

</choice>

<choice>

 <center>
 <showone trig1>
<thisone>
$$x=x10, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
<thisone>
$$x=x10\quad \vee \quad x=x11, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
```

```
</showone>
   </center>


</choice>


<choice>


 <center>  <showone trig1>
<thisone>
$$x=x111, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
<thisone>
$$x=x111\quad \vee \quad x=x112, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
</showone>   </center>


</choice>


<choice>


 <center>  <showone trig1>
<thisone>
$$x=x22, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
<thisone>
$$x=x22\quad \vee \quad x=x23, \; k \in \mathbb{Z}$$
</thisone>
</showone>   </center>


</choice>


</multiplechoice>
```

```
Os zeros da função são as soluções da equação $f(x)=0$:
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sin{(x1)}=e1.$$
Temos que
<showone trig1>
<thisone>
$$\sin{(x1)}=\sin {\left(x2\right)}\Leftrightarrow x1=x2+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$.
</thisone>
<thisone>
$$\sin{(x1)}=\sin {\left(x2\right)}\Leftrightarrow x1=x2+2k\pi
\quad \vee \quad x1=x3+2k\pi,$$ com $k \in \mathbb{Z}$.
</thisone>
</showone>
Então,
<showone trig1>
<thisone>
$$x=x8$$
</thisone>
<thisone>
$$x=x8\quad \vee \quad x=x9$$
</thisone>
</showone>

class E33B10_jp_trigonometria_005(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')

        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 1),
         (1, -1), (-1, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)), (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)),
          (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)), (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))
```

```
    s.a1, s.d1 = lista1[id]
    s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
    s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
    s.sinal1 = ur.iunif(0,1)
    s.x1 = s.b1*x+s.c1
    s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1

def solve(s):

    k=var('k')
    s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
    s.e1 = -s.d1/s.a1
    if s.e1==-1 or s.e1==1:
        s.trig1=0
    else:
        s.trig1=1
    s.x2 = asin(s.e1,hold=True).simplify()
    s.d2 = -s.d1
    s.x3 = pi-s.x2
    s.c11 = -s.c1
    s.b2 = s.b1*x
    s.x4 = s.x2/s.b1
    s.x5 = s.c11/s.b1
    s.x6 = 2*k*pi/s.b1
    s.x7 = s.x3/s.b1
    s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
    s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
    s.x10 = (s.x2+k*pi-s.c1)/s.b1
    s.x11 = (s.x3+k*pi-s.c1)/s.b1
    if s.b1==1 or s.b1==-1:
        s.x111=(s.x2-s.c1)/(2*s.b1)+2*k*pi
        s.x112=(s.x3-s.c1)/(2*s.b1)+2*k*pi
```

```
        else:
            s.x111=(s.x2-s.c1)/s.b1+2*k*pi
            s.x112=(s.x3-s.c1)/s.b1+2*k*pi
        s.x22=(s.x2+2*k*pi)/s.b1
        s.x23=(s.x3+2*k*pi)/s.b1

''')
```

Enunciado 4:

Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{3} - 2\sin(x-4)$. Indique todos os zeros da função f.

- Escolha A $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k + 4 \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k + 4, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha B $x = \frac{\pi}{3} + \pi k + 4 \vee x = \frac{2\pi}{3} + \pi k + 4, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha C $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k + 2 \vee x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k + 2, k \in \mathbb{Z}$
- Escolha D $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Proposta de resolução:

Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sin(x-4) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(x-4) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x-4) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Temos que

$$\sin(x-4) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \Leftrightarrow x - 4 = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \vee x - 4 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Então,

$$x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi + 4 \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi + 4,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 007

```
meg.save(r'''
```

```
%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno

97I20 Mappings and functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

SIACUAstart
level=4;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função seno

Considere a função definida por $$f(x)=f1$$
Pode-se afirmar que



%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>

 <center> A função não é par nem é ímpar.   </center>

</choice>

<choice>

 <center> A função é par.  </center>

</choice>

<choice>
```

```
 <center> A função é ímpar.   </center>

</choice>

<choice>

 <center> A função é par e ímpar.   </center>

</choice>

</multiplechoice>

<br> Seja $D_f$ um conjunto simétrico (isto é, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$). </br>


<br> Se $f(-x)=f(x), \, \forall x\in D_f$, isto é, igual à própria função,
a função é par;</br>

<br> Se $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$, isto é, igual à sua simétrica,
a função é  ímpar.</br>

<br> </br>

<br> Para estudar a paridade da função  $f$, atendendo a que o domínio, $\mathbb{R}$,
 é um conjunto simétrico, calculamos $f(-x)$ e $-f(x)$:</br>

    $$f(-x)= f1paridade \quad \mbox{e} \quad -f(x)=-(f1)=f2paridade$$

Neste caso, como $f(-x)$ duvid1@c{"é","é","não é"} igual
duvid1@c{"à própria função","ao simétrico da função",
"nem à função nem à sua simétrica"}, a função
duvid1@c{"é uma função par","é uma função ímpar",
"nem é uma função par nem ímpar"}.
```

```
class E33B10_jp_trigonometria_007(Exercise):

    def make_random(s):

        x=var('x')
        k=var('k')

        lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)),
        (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)), (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)),
        (-2, -sqrt(2))]

        id=ZZ.random_element(len(lista1))

        s.a1, s.d1 = lista1[id]
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1 = s.b1*x+s.c1
        s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f1paridade = s.a1*sin(s.b1*(-x)+s.c1)+s.d1
        s.f2paridade = -(s.a1*sin(s.x1)+s.d1)

    def solve(s):

        if s.f1paridade == s.f1:
            s.duvid1 = 0
        elif s.f2paridade == s.f1paridade:
            s.duvid1 = 1
        else:
            s.duvid1 = 2

''')
```

Enunciado:

Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{2} + 2\sin(-3x+4)$. Pode-se afirmar que

- Escolha A A função não é par nem é ímpar.
- Escolha B A função é par.
- Escolha C A função é ímpar.
- Escolha D A função é par e ímpar.

Proposta de resolução:

Seja D_f um conjunto simétrico (isto é, se $x \in D_f$ então $-x \in D_f$).

Se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$, isto é, igual à própria função, a função é par;

Se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, isto é, igual à sua simétrica, a função é impar.

Para estudar a paridade da função f, atendendo a que o domínio, $\mathbb{R}$, é um conjunto simétrico, calculamos $f(-x)$ e $-f(x)$:

$$f(-x) = \sqrt{2} + 2\sin(3x+4) \quad \text{e} \quad -f(x) = -(\sqrt{2} + 2\sin(-3x+4) = -\sqrt{2} - 2\sin(-3x+4)$$

Neste caso, como $f(-x)$ não é igual nem à função nem à sua simétrica, a função nem é uma função par nem ímpar.

Exercício E33B10 jp trigonometria 008

```
meg.save(r'''

%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno

97I20 Mappings and functions
Palavras chave: Funções trigonométricas; seno
```

```
SIACUAstart
level=4;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função seno

Considere a função definida por $$f(x)=f1$$
Quais são os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$?

%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>

 <center> $$listz$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$listz1$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$listz2$$  </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$listz3$$   </center>
```

```
</choice>

</multiplechoice>

Os zeros da função são os valores de $x$ que são soluções da equação $f(x)=0$.
$$f(x)=0 \Leftrightarrow f1=0 \Leftrightarrow f2=d2 \Leftrightarrow \sin{(x1)}=e1.$$

Sabemos que $$\sin{(x)} = \sin{(\alpha)} \Leftrightarrow x=\alpha + 2k\pi \quad \vee
 \quad x=(\pi -\alpha)+2k\pi, \, \mbox{ com }\, k \in \mathbb{Z}$$
e que um ângulo cujo seno é $\displaystyle e1$ é  $\displaystyle \left( x2\right)$.
Então, vem que $$\sin{(x1)}=\sin {\left(x2\right)}$$

Logo $$x1=x2+2k\pi \quad \vee
 \quad x1=\left(\pi - \left(x2\right)\right) +2k\pi, \, \mbox{ com }\, k \in \mathbb{Z}$$
ou seja,  $$x=x8\quad \vee \quad x=x9.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$, logo,
$$ 0 \le x8 \le 2\pi \quad \vee \quad 0 \le x9 \le 2\pi \Leftrightarrow $$
$$ \Leftrightarrow zero0 \le x6 \le zero1 \quad
\vee \quad zero2 \le x6 \le zero3 \Leftrightarrow$$
$$ \Leftrightarrow zero00 \le k \le zero11 \quad
\vee \quad zero22 \le k \le zero33$$
Assim, como $k$ é um número inteiro, $$k \in listk1 \quad \vee \quad k \in listk2$$
As soluções da equação $f(x)=0$ pertencentes ao intervalo $[0,2\pi]$ são,
portanto, $$listz$$

class E33B10_jp_trigonometria_008(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        #falta remover duplicados.
        return r’\left\{’+join([latex(i) for i in sorted(num_list)],’,’)+r’\right\}’
```

```
def make_random(s):

    x=var('x')
    k=var('k')

    lista1=[(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (2, sqrt(3)), (2, -sqrt(3)),
    (-2, sqrt(3)), (-2, -sqrt(3)), (2, sqrt(2)), (-2, sqrt(2)), (2, -sqrt(2)),
    (-2, -sqrt(2))]

    id=ZZ.random_element(len(lista1))

    s.a1, s.d1 = lista1[id]
    s.b1 = ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
    s.c1 = ur.iunif_nonset(-5,5,[0])

    s.x1 = s.b1*x+s.c1
    s.f1 = s.a1*sin(s.x1)+s.d1

def solve(s):

    s.f2 = s.a1*sin(s.x1)
    s.e1 = -s.d1/s.a1
    s.x2 = asin(s.e1).simplify()
    s.d2 = -s.d1
    s.x3 = pi-s.x2
    s.c11 = -s.c1
    s.b2 = s.b1*x
    s.contas1 = s.x2+s.c11+2*k*pi
    s.contas2 = s.x3+s.c11+2*k*pi
    s.x4 = s.x2/s.b1
    s.x5 = s.c11/s.b1
    s.x6 = 2*k*pi/s.b1
    s.x7 = s.x3/s.b1
```

```
s.x8 = s.x4+s.x5+s.x6
s.x9 = s.x7+s.x5+s.x6
s.zero0 = -s.x4-s.x5
s.zero1 = 2*pi-s.x4-s.x5
s.zero2 = -s.x7-s.x5
s.zero3 = 2*pi-s.x7-s.x5
s.zero4 = s.zero0*s.b1/(2*pi)
s.zero5 = s.zero1*s.b1/(2*pi)
s.zero6 = s.zero2*s.b1/(2*pi)
s.zero7 = s.zero3*s.b1/(2*pi)
s.zero00 = min(s.zero4, s.zero5)
s.zero11 = max(s.zero4, s.zero5)
s.zero22 = min(s.zero6, s.zero7)
s.zero33 = max(s.zero6, s.zero7)
if s.zero00>0:
    s.zero01 = int(s.zero00)+1
else:
    s.zero01 = int(s.zero00)
if s.zero11<0:
    s.zero12 = int(s.zero11)-1
else:
    s.zero12 = int(s.zero11)

if s.zero22>0:
    s.zero21 = int(s.zero22)+1
else:
    s.zero21 = int(s.zero22)
if s.zero33<0:
    s.zero34 = int(s.zero33)-1
else:
    s.zero34 = int(s.zero33)

s.listk1 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero01, s.zero12+1)])
```

```
        s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (s.zero21, s.zero34+1)])
        s.listz =  s.ordered_set ( [s.x8(k=i) for i in xrange(s.zero01,
        s.zero12+1)] + [s.x9(k=i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )
        s.listz1 =  s.ordered_set ( [s.x8(k=i) for i in xrange(s.zero01,
        s.zero12+1)] )
        s.listz2 =  s.ordered_set ( [s.x9(k=i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )
        s.listz3 =  s.ordered_set ( [s.x7(k=i) for i in xrange(s.zero01,
        s.zero12+1)] + [s.x9(k=i) for i in xrange(s.zero21, s.zero34+1)] )



    def rewrite(self,text):
        """
        Derive this function and implement rewritting rules to
        change latex expressions for example.
        """

        #1/2 * sqrt(2)
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text

''')
```

Enunciado:

Considere a função definida por

$$f(x) = -2\sin(x-4) - \sqrt{2}$$

Quais são os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$?

- Escolha A $\{-\frac{3}{4}\pi + 4, -\frac{1}{4}\pi + 4\}$
- Escolha B $\{-\frac{1}{4}\pi + 4\}$
- Escolha C $\{-\frac{3}{4}\pi + 4\}$
- Escolha D $\{-\frac{3}{4}\pi + 4, -\frac{5}{4}\pi\}$

Proposta de resolução: Os zeros da função são os valores de x que são soluções da equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(x-4) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow -2\sin(x-4) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x-4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sabemos que

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

e que um ângulo cujo seno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é

$$\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$$

. Então, vem que

$$\sin(x-4) = \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$$

Logo

$$x - 4 = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x - 4 = \left(\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right) + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

ou seja,

$$x = -\frac{1}{4}\pi + 2\pi k + 4 \quad \vee \quad x = -\frac{5}{4}\pi + 2\pi k + 4.$$

Pretendemos os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, logo,

$$0 \leq -\frac{1}{4}\pi + 2\pi k + 4 \leq 2\pi \quad \vee \quad 0 \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi k + 4 \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\pi - 4 \leq 2\pi k \leq \frac{9}{4}\pi - 4 \quad \vee \quad -\frac{5}{4}\pi - 4 \leq 2\pi k \leq \frac{3}{4}\pi - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi - 16}{8\pi} \leq k \leq \frac{9\pi - 16}{8\pi} \quad \vee \quad -\frac{5\pi + 16}{8\pi} \leq k \leq \frac{3\pi - 16}{8\pi}$$

Assim, como k é um número inteiro,

$$k \in \{0\} \quad \vee \quad k \in \{-1\}$$

As soluções da equação $f(x) = 0$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são, portanto,

$$\{-\frac{3}{4}\pi + 4, -\frac{1}{4}\pi + 4\}$$

Exercício E33B10 jp trigonometria 009

```
meg.save(r'''

%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função cosseno


97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions


Também pode ser 26A09 Elementary functions


Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno


SIACUAstart
level=2;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend


%PROBLEM A função cosseno


Qual é o contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por
$f(x)= a1-\cos^{2}{(b1x)}$?



%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>
```

<center> $CD_f=[minf, maxf]$ </center>

</choice>

<choice>

<center> $CD_f=[minf1, maxf1]$ </center>

</choice>

<choice>

<center> $CD_f=[minf2, maxf2]$ </center>

</choice>

<choice>

<center> $CD_f=[minf3, maxf3]$ </center>

</choice>

</multiplechoice>
Sabemos que domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e
o respetivo contradomínio é $[-1,1]$. Como $(b1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$
mas a função cosseno está ao quadrado, vem que
$$0 \le \cos^{2}{(b1x)} \le 1$$
$$-1 \le -\cos^{2}{(b1x)} \le 0$$
$$minf \le a1-\cos^{2}{(b1x)} \le maxf$$
Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f=[minf, maxf]$

class E33B10_jp_trigonometria_009(Exercise):

```
    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x

    def solve(s):

        s.min0 = s.a1-1
        s.minf = min(s.min0, s.a1)
        s.maxf = max(s.min0, s.a1)
        s.minf1 = s.minf +1
        s.maxf1 = s.maxf +1
        s.minf2 = s.minf + 2
        s.maxf2 = s.maxf +2
        s.minf3 = s.minf +3
        s.maxf3 = s.maxf +3

''')
```

Enunciado:

Qual é o contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 - \cos^2(-17x)$?

- Escolha A $[-10, -9]$
- Escolha B $[-9, -8]$
- Escolha C $[-8, -7]$
- Escolha D $[-7, -6]$

Proposta de resolução: Sabemos que domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o respetivo contradomínio é $[-1, 1]$. Como $(-17x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$ mas a função cosseno está ao quadrado, vem que

$$0 \leq \cos^2(-17x) \leq 1$$

$$-1 \leq -\cos^2(-17x) \leq 0$$

$$-10 \leq -9 - \cos^2(-17x) \leq -9$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-10, -9]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0010

```
meg.save(r'''

%Summary Funções reais de variável real; Funções trigonométricas; Função seno



97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

SIACUAstart
level=4;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend
%PROBLEM A função seno

Qual é o contradomínio da função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por
$f(x)= a1-\sin^{2}{(b1x)}$?



%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>
```

```
 <center> $CD_f=[minf, maxf]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[minf1, maxf1]$    </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[minf2, maxf2]$    </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[minf3, maxf3]$    </center>

</choice>

</multiplechoice>
 Sabemos que o domínio da  função seno é $\mathbb{R}$ e
 o respetivo contradomínio  é $[-1,1]$. Como $(b1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$,
  mas a função seno está ao quadrado, vem que
$$0 \le \sin^{2}{(b1x)} \le 1$$
$$-1 \le -\sin^{2}{(b1x)} \le 0$$
$$minf \le a1-\sin^{2}{(b1x)} \le maxf$$
Logo, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[minf, maxf]$

class E33B10_jp_trigonometria_0010(Exercise):
```

```
    def make_random(s):

        x = var('x')
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1x=s.b1*x

    def solve(s):

        s.min0 = s.a1-1
        s.minf = min(s.min0, s.a1)
        s.maxf = max(s.min0, s.a1)
        s.minf1 = s.minf +1
        s.maxf1 = s.maxf +1
        s.minf2 = s.minf + 2
        s.maxf2 = s.maxf +2
        s.minf3 = s.minf +3
        s.maxf3 = s.maxf +3

''')
```

Enunciado:

Qual é o contradomínio da função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = -9 - \sin^2(-17x)$?

- Escolha A $[-10, -9]$
- Escolha B $[-9, -8]$
- Escolha C $[-8, -7]$
- Escolha D $[-7, -6]$

Proposta de resolução: Sabemos que domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o respetivo contradomínio é $[-1,1]$. Como $(-17x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$ mas a função cosseno está ao quadrado, vem que

$$0 \leq \sin^2(-17x) \leq 1$$

$$-1 \leq -\sin^2(-17x) \leq 0$$

$$-10 \leq -9 - \sin^2(-17x) \leq -9$$

Logo, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [-10,-9]$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0011

```
meg.save(r'''
%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno


97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions


Também pode ser 26A09 Elementary functions


Palavras chave: Funções trigonométricas; seno


SIACUAstart
level=1;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend


%PROBLEM A função seno
Qual é o domínio da função definida por
$f(x)=f1$?



%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>
```

```
 <center> $D=\mathbb{R} $   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $D=[-1,1]$    </center>

</choice>

<choice>

 <center> $D=\mathbb{R}^+$    </center>

</choice>

<choice>

 <center> $D=\mathbb{R}^-$    </center>

</choice>

</multiplechoice>

O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e
como o domínio da função $g(x)=x1$ também é $\mathbb{R}$,
o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$.

class E33B10_jp_trigonometria_0011(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        k=var('k')
```

```
        s.a1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0,1])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1=s.b1*x+s.c1
        s.f1=s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f2=s.a1*sin(s.x1)

    def solve(s):
        pass

''')
```

Enunciado 5:

Qual é o domínio da função definida por $f(x) = -2\sin(-2x-2)+2$?

- Escolha A $D = \mathbb{R}$
- Escolha B $D = [-1, 1]$
- Escolha C $D = \mathbb{R}^+$
- Escolha D $\mathbb{R}^-$

Proposta de resolução:

O domínio da função seno é o intervalo $\mathbb{R}$ e como o domínio da função $g(x) = -2x - 2$ também é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 0012:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions
```

```
Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

SIACUAstart
level=4;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função seno
Considere a função definida por
$$f(x)=f1$$ Qual é o seu contradomínio?


%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>

 <center> $CD_f=[min2,max2]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[min3,max3]$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $CD_f=[min4,max4]$   </center>

</choice>
```

```
<choice>

 <center> $CD_f=[min5,max5]$   </center>

</choice>

</multiplechoice>

Sabemos que domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e
o respetivo contradomínio é $[-1,1]$. Como $x1$ tem de domínio $\mathbb{R}$,
$$-1 \le \sin{(x1)}\le 1$$
então
$$min1 \le f2 \le max1$$
e tem-se $$min2 \le f1 \le max2$$
Ou seja, o contradomínio da função $f$ é o conjunto $CD_f=[min2,max2]$.

class E33B10_jp_trigonometria_0012(Exercise):

    def make_random(s):

        x=var(’x’)
        k=var(’k’)
        s.a1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0,1])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.sinal1=ur.iunif(0,1)
        s.x1=s.b1*x+s.c1
        s.f1=s.a1*sin(s.x1)+s.d1
        s.f2=s.a1*sin(s.x1)

    def solve(s):
```

```
        s.max1=abs(s.a1)
        s.min1=-s.max1
        s.max2=s.max1+s.d1
        s.min2=s.min1+s.d1
        if s.a1<0:
            s.sinal1=1
        else:
            s.sinal1=0

        s.min3=s.min1+s.d1+1
        s.max3=s.max1+s.d1+1
        s.min4=s.min1+s.d1+2
        s.max4=s.max1+s.d1+2
        s.min5=s.min1+s.d1+3
        s.max5=s.max1+s.d1+3


''')
```

Enunciado:

Considere a função definida por $f(x) = -2sin(-2x-2)+2$. Qual é o seu contradomínio?

- Escolha A $[0, 4]$
- Escolha B $[1, 5]$
- Escolha C $[2, 6]$
- Escolha D $[3, 7]$

Proposta de resolução: Sabemos que domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o respetivo contradomínio é $[-1, 1]$. Como $(-2x-2)$ tem de domínio $\mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin(-2x-2) \leq 1$$

então

$$-2 \leq -2\sin(-2x-2) \leq 2$$

e tem-se

$$0 \leq -2\sin(-2x-2)+2 \leq 4$$

Ou seja, o contradomínio da função f é o conjunto $CD_f = [0, 4]$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 0013

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Palavras chave: Funções trigonométricas; seno

SIACUAstart
level=4;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função seno
O período da função definida por
$f(x)=f1$
 é

%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>
```

```
 <center> $$per2$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$per3$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$per4$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$per5$$  </center>

</choice>

</multiplechoice>

O período de uma função é o menor número positivo, $p$,
que verifica $f(x+p)=f(x)$.
Usando a definição, e o facto de a função seno ser periódica
de período $2 \pi$, vamos determinar $p$.
$$f(x+p)=f1p$$
e igualando a $f(x)$, vem:
    $$f1p=f1 \Leftrightarrow f1p1=f11$$
    Atendendo agora ao facto de que a função seno é periódica
    de período $2 \pi$, resulta que
```

```
    $$x1p=x1+2\pi$$
Então, o período de $f$, $p>0$, é dado por
$$\displaystyle p=\frac {2 \pi}{\lvert b1 \rvert}=per2$$

class E33B10_jp_trigonometria_0013(Exercise):

    def make_random(s):

        x=var('x')
        k=var('k')
        p=var('p')
        s.a1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0,1])
        s.b1=ur.iunif_nonset(-3,3,[0])
        s.c1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.d1=ur.iunif_nonset(-5,5,[0])
        s.x1=s.b1*x+s.c1
        s.f1=s.a1*sin(s.x1)+s.d1

    def solve(s):

        s.per1=abs(s.b1)
        s.per2=2*pi/s.per1
        s.per3=pi/s.per1
        s.per4=3*pi/s.per1
        s.per5=2/s.per1
        s.x1p=s.b1*(x+p)+s.c1
        s.f1p=s.a1*sin(s.x1p)+s.d1
        s.f1p1=sin(s.x1p)
        s.f11=sin(s.x1)

''')
```

Enunciado:

O período da função definida por $f(x) = -2sin(-2x-2)+2$ é

- Escolha A π
- Escolha B $\frac{1}{2}\pi$
- Escolha C $\frac{3}{2}\pi$
- Escolha D 1

Proposta de resolução: O período de uma função é o menor número positivo, p, que verifica $f(x+p) = f(x)$. Usando a definição, e o facto de a função seno ser periódica de período 2π, vamos determinar p.

$$f(x+p) = -2\sin(-2p-2x-2)+2$$

e igualando a $f(x)$, vem:

$$-2\sin(-2p-2x-2)+2 = -2\sin(-2x-2)+2 \Leftrightarrow \sin(-2p-2x-2) = \sin(-2p-2x-2)$$

Atendendo agora ao facto de que a função seno é periódica de período 2π, resulta que

$$-2p-2x-2 = -2x-2+2\pi$$

Então, o período de f, $p > 0$, é dado por

$$p = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi$$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0014

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions
```

Funções cosseno e seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno

```
SIACUAstart
level=3;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função cosseno e seno

Seja $f$ a função definida por $\sin^{2}(a11)+f1.$

A função $f$

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>

 <center> é par. </center>

</choice>

<choice>

 <center>  é ímpar.   </center>

</choice>

<choice>

 <center>  é par e ímpar.  </center>
```

```
</choice>

<choice>

 <center>  não é par,  nem é ímpar.  </center>

</choice>

</multiplechoice>

Calculemos $f(-x)$:
    $$f(-x)= \sin^{2}(a12)+f2$$
    como $\cos(-x)=\cos(x)$, pois a função cosseno é uma função par
    e a função seno, apesar de ser ímpar está elevada ao quadrado
    (portanto, $\sin^{2}(a11)=\sin^{2}(a12)$),
      resulta que
$$f(-x)=\sin^2(a11)+f1 =  f(x)$$
Logo, a função $f$ é uma função par.

class E33B10_jp_trigonometria_0014(Exercise):

    def make_random(s):
        x = var('x')
        k = var('k')
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-10, 10, [0])
        s.e1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
        s.k1 = ur.iunif(1, 2)
        s.k2 = ur.iunif(1, 2)
        s.d1 = ur.iunif(2, 4)
        #s.a1 = s.k1*s.d1
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
        s.b1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
```

```
        #s.b1 = s.k2*s.d1
        s.z1 = lcm(s.a1, s.b1)
        s.a11=s.a1*x
        s.b11=s.b1*x
        s.f1 = cos(s.b11)+s.c1

    def solve(s):
        s.aux1 = pi/s.z1
        s.aux2 = s.e1*pi/s.z1
        s.a12=-s.a11
        s.f2 = cos(-s.b1*x)+s.c1
        if s.c1> 0:
            s.c2 = 1
        else:
            s.c2 = 0
        s.c3 = abs(s.c1)

''')
```

Enunciado 6:

Seja f a função definida por $\sin^2(8x) + \cos(8x) + 2$. A função f

- Escolha A é par
- Escolha B é ímpar
- Escolha C é par e ímpar
- Escolha D não é par, nem é ímpar

Proposta de resolução:

Calculemos $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin^2(-8x) + \cos(-8x) + 2$$

como $\cos(-x) = \cos(x)$, pois a função cosseno é uma função par e a função seno, apesar de ser ímpar está elevada ao quadrado (portanto, $\sin^2(8x) = \sin^2(-8x)$), resulta que

$$f(-x) = \sin^2(8x) + \cos(8x) + 2 = f(x)$$

Logo, a função f é uma função par.

Exercício E33B10 jp trigonometria 0015:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Funções cosseno e seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno

SIACUAstart
level=2;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4431,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função cosseno e seno

Seja $f$ a função definida por $\sin^{2}(a1x)+f1.$
Qual é o valor exato de
$f \left( \displaystyle aux1 \right) - f \left( \displaystyle aux2\right)$?

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>
```

```
 <center> $aux9$ </center>

</choice>

<choice>

 <center>  $aux10$  </center>

</choice>

<choice>

 <center> $aux11$  </center>

</choice>

<choice>

 <center> $aux12$  </center>

</choice>

</multiplechoice>

Comecemos por substituir $x$ por $\displaystyle aux1$ em $\sin^{2}(a1x)+f1$:
$$f\left( \displaystyle aux1\right)= \sin^{2}\left(\displaystyle  aux3\right)+
\cos\left(\displaystyle  aux4\right)+c3 = \displaystyle aux5 $$

De igual modo, substituimos $x$ por $\displaystyle aux2$ e obtemos
$$f\left( \displaystyle aux2\right)= \sin^{2}\left(\displaystyle  aux6\right)+
\cos\left(\displaystyle  aux7\right)+c3 = \displaystyle aux8 $$

Em suma, $f \left( \displaystyle aux1 \right) -
```

```
f \left( \displaystyle aux2 \right)= \displaystyle aux9$

class E33B10_jp_trigonometria_0015(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')
        k = var('k')
        s.c1 = ur.iunif_nonset(-10, 10, [0])
        s.e1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
        s.k1 = ur.iunif(1, 2)
        s.k2 = ur.iunif(1, 2)
        s.d1 = ur.iunif(2, 4)
        s.a1 = s.k1*s.d1
        s.b1 = s.k2*s.d1
        s.z1 = lcm(s.a1, s.b1)

    def solve(s):

        s.aux1 = pi/s.z1
        s.aux2 = s.e1*pi/s.z1
        s.f1 = cos(s.b1*x)+s.c1
        s.c3 = abs(s.c1)
        s.aux3 = s.a1*s.aux1
        s.aux4 = s.b1*s.aux1
        s.aux5 = (sin(s.aux3))**2+cos(s.aux4)+s.c1
        s.aux6 = s.a1*s.aux2
        s.aux7 = s.b1*s.aux2
        s.aux8 = (sin(s.aux6))**2+cos(s.aux7)+s.c1
        s.aux9 = s.aux5-s.aux8
        s.aux10 = s.aux9 +1
        s.aux11 = s.aux9-1
        s.aux12 = s.aux9-2
```

```
''')
```

Enunciado:

Seja f a função definida por $\sin^2(6x)+\cos(6x)+2$. Qual é o valor exato de $f\left(\frac{1}{6}\pi\right)-f\left(-\pi\right)$?

- Escolha A -2
- Escolha B -1
- Escolha C -3
- Escolha D -4

Proposta de resolução: Comecemos por substituir x por $\frac{1}{6}\pi$ em $\sin^2(6x)+\cos(6x)+2$:

$$f\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\sin^2(\pi)+\cos(\pi)+2=1$$

De igual modo, substituimos x por $-\pi$ e obtemos

$$f(-\pi)=\sin^2(-6\pi)+\cos(-6\pi)+2=3$$

Em suma, $f\left(\frac{1}{6}\pi\right)-f(-\pi)=-2$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0016:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno

97I20 Mappings and functions

Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Funções cosseno e seno
```

```
Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno


SIACUAstart
level=3;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432,1) ]
SIACUAend

%PROBLEM A função cosseno e seno

Seja $f$ a função definida por $\sin^{2}(a1x)+f1.$ Quais os valores de $x$
no intervalo $ [- \pi, \pi[ $ que satisfazem a equação $ f(x)= f1$?


%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>

 <center> $$list1$$ </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$list2$$   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $$list3$$  </center>
```

```
</choice>

<choice>

 <center> $$list4$$  </center>

</choice>

</multiplechoice>

Resolvamos a equação $f(x)= c1+\cos(b1x)$.

$$\sin^{2}(a1x)+f1=f1 \Leftrightarrow \sin^{2}(a1x)=0
\Leftrightarrow \sin(a1x)=0$$
Como $\sin{0}=0$, então
$$\sin(a1x)=\sin 0 \Leftrightarrow a1x = 0+ k \pi
\Leftrightarrow x = \displaystyle \frac {k \pi}{a1}$$
com $k \in \mathbb{Z}$.

Como $x \in [- \pi, \pi[$, vem que
$$ -\pi \le \displaystyle \frac {k \pi}{a1} < \pi$$
$$ -a1 \le k < a1.$$
Como $k$ é um número inteiro, $$k \in listk$$
Os valores de $x \in [- \pi, \pi[$ solução da equação dada são $$list1$$

class E33B10_jp_trigonometria_0016(Exercise):

    def ordered_set(s,num_list):
        return r'\left\{' + join( [ latex(i)
        for i in sorted( num_list ) ], ',')+ r'\right\}'

    def make_random(s):
```

```
    x = var('x')
    k = var('k')
    s.c1 = ur.iunif_nonset(-10, 10, [0])
    s.e1 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0, 1])
    s.k1 = ur.iunif(1, 2)
    s.k2 = ur.iunif(1, 2)
    s.d1 = ur.iunif(2, 4)
    s.a1 = s.k1*s.d1
    s.a1x=s.a1*x
    s.b1 = s.k2*s.d1
    s.z1 = lcm(s.a1, s.b1)

def solve(s):

    s.f1 = cos(s.b1*x)+s.c1
    s.aux0 = k*pi/s.a1
    s.listk = s.ordered_set ([i for i in xrange (-s.a1, s.a1)])
    s.list1 =  s.ordered_set ( [s.aux0(i) for i in xrange (-s.a1, s.a1)])
    s.listk2 = s.ordered_set ([i for i in xrange (-s.a1+1, s.a1+1)])
    s.list2 =  s.ordered_set ( [s.aux0(i) for i in xrange (-s.a1+1, s.a1+1)])
    s.listk3 = s.ordered_set ([i for i in xrange (-s.a1+2, s.a1+2)])
    s.list3 =  s.ordered_set ( [s.aux0(i) for i in xrange (-s.a1+2, s.a1+2)])
    s.listk4 = s.ordered_set ([i for i in xrange (-s.a1, s.a1+3)])
    s.list4 =  s.ordered_set ( [s.aux0(i) for i in xrange (-s.a1, s.a1+3)])

def rewrite(self,text):
    """
    Derive this function and implement rewritting rules
    to change latex expressions for example.
    """

    #1/2 * sqrt(2)
```

```
        exp_pattern = re.compile(ur'\\frac\{(\d+)\}\{(\d+)\} \\, \\sqrt\{(\d+)\}',re.U)
        out_text = re.sub(exp_pattern, r'\\frac{\\sqrt{\3}}{\2}', text)
        return out_text

''')
```

Enunciado:

Seja f a função definida por $\sin^2(6x)+cos(6x)+2$. Quais os valores de x no intervalo $[-\pi,\pi[$ que satisfazem a equação $f(x)=\cos(6x)+2$?

- Escolha A $\{-\pi,-\frac{5}{6}\pi,-\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{3}\pi,-\frac{1}{6}\pi,0,\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi\}$
- Escolha B $\{-\frac{5}{6}\pi,-\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{3}\pi,-\frac{1}{6}\pi,0,\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi,\pi\}$
- Escolha C $\{-\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{3}\pi,-\frac{1}{6}\pi,0,\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi,\pi,\frac{7}{6}\pi\}$
- Escolha D $\{-\pi,-\frac{5}{6}\pi,-\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{3}\pi,-\frac{1}{6}\pi,0,\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi,\pi,\frac{7}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\}$

Proposta de resolução: Resolvamos a equação $f(x)=2+\cos(6x)$.

$$\sin^2(6x)+\cos(6x)+2=\cos(6x)+2 \Leftrightarrow \sin^2(6x)=0 \Leftrightarrow \sin(6x)=0$$

Como $\sin 0=0$, então

$$\sin(6x)=\sin 0 \Leftrightarrow 6x=0+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{6}$$

com $k\in\mathbb{Z}$.

Como $x\in[-\pi,\pi[$, vem que

$$-\pi \le \frac{k\pi}{6} < \pi$$

$$-6 \le k < 6.$$

Como k é um número inteiro,

$$k\in\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$$

Os valores de $x\in[-\pi,\pi[$ solução da equação dada são

$$-\pi,-\frac{5}{6}\pi,-\frac{2}{3}\pi,-\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{3}\pi,-\frac{1}{6}\pi,0,\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{2}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi$$

Exercício E33B10 jp trigonometria 0018:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno

SIACUAstart
level=2;  slip= 0.3; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4432, 1) ]
SIACUAend

97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Extremos das funções cosseno e seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno

%PROBLEM A função cosseno e seno

Considere a  expressão $h1\sin^{2}{(a1x)}-b1$.
Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>

 <center> $minf1$  e $maxf1$. </center>

</choice>

<choice>
```

```
 <center> $minf2$  e $maxf2$.   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf3$ e $maxf3$.  </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf4$ e $maxf4$.  </center>

</choice>

</multiplechoice>

Sabemos que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e  o contradomínio é $[-1, 1]$.
A função $f(x)=\sin^{2}{(a1x)} $ tem por domínio $\mathbb{R}$ mas contradomínio $[0,1]$,
já que o seno está elevado ao quadrado:
$$0 \le \sin^{2}{(a1x)} \le 1$$
Assim,
$$minf1 \le h1\sin^{2}{(a1x)}-b1 \le maxf1$$
e, portanto,  $minf1$ é o valor mínimo
e $maxf1$ o valor máximo da função  $f(x)=h1\sin^{2}{(a1x)}-b1 $.

class E33B10_jp_trigonometria_0018(Exercise):

     def make_random(s):

        x = var('x')
```

```
        s.a1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.b1 = ur.iunif(1, 20)
        s.h1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0, 1])
        s.a1x=s.a1*x

    def solve(s):

        s.aux1 = min (s.h1, 0)
        s.aux2 = max (s.h1, 0)
        s.minf1 = s.aux1-s.b1
        s.maxf1 = s.aux2-s.b1
        s.minf2 = s.minf1
        s.maxf2 = s.maxf1+1
        s.minf3 = s.minf1+2
        s.maxf3 = s.maxf1+1
        s.minf4 = s.minf1+3
        s.maxf4 = s.maxf1+2

''')
```

Enunciado:

Considere a expressão $15\sin^2(-9x) - 4$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A -4 e 11.
- Escolha B -4 e 12.
- Escolha C -2 e 12.
- Escolha D -1 e 13.

Proposta de resolução: Sabemos que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $[-1, 1]$. A função $f(x) = \sin^2(-9x)$ tem por domínio $\mathbb{R}$ mas contradomínio $[0, 1]$, já que o seno está elevado ao quadrado:

$$0 \leq \sin^2(-9x) \leq 1$$

Assim,

$$-4 \leq 15\sin^2(-9x) - 4 \leq 11$$

e, portanto, -4 é o valor mínimo e 11 o valor máximo da função $f(x) = 15\sin^2(-9x) - 4$.

Exercício E33B10 jp trigonometria 0019:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno



97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions


Também pode ser 26A09 Elementary functions


Extremos das funções cosseno e seno


Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno; seno


SIACUAstart
level=2;  slip= 0.2; guess=0.25; discr=0.3
concepts = [(4432, 1)]
SIACUAend


%PROBLEM A função cosseno e seno


Considere a  expressão $c1 \cos^{2}{(d1x)}$.
Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,


%ANSWER
```

```
<multiplechoice>
<choice>

 <center> $minf2$ e $maxf2$. </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf3$ e $maxf3$.   </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf4$ e $maxf4$.  </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf5$ e $maxf5$.  </center>

</choice>

</multiplechoice>

Sabemos que o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e
o contradomínio é $[-1, 1]$.
A função $f(x)=\cos^{2}{(d1x)}$ tem por domínio $\mathbb{R}$
mas contradomínio $[0,1]$, já que o cosseno está elevado ao quadrado:
$$0 \le \cos^{2}{(d1x)} \le 1$$
```

```
Assim,

$$minf2 \le c1\cos^{2}{(d1x)} \le maxf2$$

Então $minf2$ e $maxf2$ são os valores mínimo e

máximo da função $g(x)= c1\cos^{2}{(d1x)}$, respetivamente.


class E33B10_jp_trigonometria_0019(Exercise):


    def make_random(s):


        x = var('x')

        s.c1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0, 1])

        s.d1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])

        s.h1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0, 1])

        s.f1=s.c1*(cos(s.d1*x))^2


    def solve(s):


        s.aux1 = min (s.h1, 0)

        s.aux2 = max (s.h1, 0)

        s.minf2 = min (s.c1, 0)

        s.maxf2 = max (s.c1, 0)

        s.minf3 = s.minf2 +1

        s.maxf3 = s.maxf2 + 1

        s.minf4 = s.minf2 +2

        s.maxf4 = s.maxf2 +2

        s.minf5 = s.minf2 + 3

        s.maxf5 = s.maxf2 + 1

''')
```

Enunciado 7:

Considere a expressão $-9\cos^2(-17x)$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A -9 e 0
- Escolha B -8 e 1
- Escolha C -7 e 2
- Escolha D -6 e 1

Proposta de resolução:

Sabemos que o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $[-1, 1]$. A função $f(x) = \cos^2(-17x)$ tem por domínio $\mathbb{R}$ mas contradomínio $[0, 1]$, já que o cosseno está elevado ao quadrado:

$$0 \leq \cos^2(-17x) \leq 1$$

Assim,

$$-9 \leq -9\cos^2(-17x) \leq 0$$

Então -9 e 0 são os valores mínimo e máximo da função $g(x) = -9\cos^2(-17x)$, respetivamente .

Exercício E33B10 jp trigonometria 0020:

```
meg.save(r'''

%Summary Funções trigonométricas; Função cosseno e seno



97I20 Mappings and functions
Funções trigonométricas (33B10) Exponential and trigonometric functions

Também pode ser 26A09 Elementary functions

Extremos das funções cosseno e seno

Palavras chave: Funções trigonométricas; cosseno
```

```
%PROBLEM A função cosseno

Qual o valor máximo e o valor mínimo da expressão
 $\displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1}-g1$

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice>

 <center> $minf3$ e $maxf3$ são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente. </center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf4$ e $maxf4$ são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.</center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf5$ e $maxf5$ são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.</center>

</choice>

<choice>

 <center> $minf6$ e $maxf6$ são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.  </center>

</choice>

</multiplechoice>
```

```
Sabemos que, tanto o contradomínio da função  cosseno é $[-1, 1]$.
A função cosseno está ao quadrado e $(e1x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, então
$$0 \le \cos^{2}(e1 x)} \le 1$$
$$0 \le \displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1} \le aux3$$
$$minf3 \le \displaystyle \frac{\cos^{2}(e1 x)}{f1}-g1 \le maxf3$$
O valor $\displaystyle minf3$ é o valor mínimo
e o valor $\displaystyle maxf3$ é o valor máximo

class E33B10_jp_trigonometria_0020(Exercise):

    def make_random(s):

        x = var('x')

        s.e1 = ur.iunif_nonset(-20, 20, [0])
        s.f1 = ur.iunif(2, 9)
        s.g1 = ur.iunif(1, 20)

    def solve(s):
        s.aux3 = 1/s.f1
        s.minf3 = min (s.aux3-s.g1, 0)
        s.maxf3 = max (s.aux3-s.g1, 0)
        s.minf4 = s.minf3 +1
        s.maxf4 = s.maxf3 +1
        s.minf5 = s.minf3 +2
        s.maxf5 = s.maxf3 +2
        s.minf6 = s.minf3 +3
        s.maxf6 = s.maxf3 +3

''')
```

Enunciado:

Considere a expressão $\dfrac{\cos^2(-9x)}{5} - 2$. Então, os seus valores mínimo e máximo são, respetivamente,

- Escolha A $-\frac{9}{5}$ e 0 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha B $-\frac{4}{5}$ e 1 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha C $\frac{1}{5}$ e 2 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.
- Escolha D $\frac{6}{5}$ e 3 são o valor mínimo e o valor máximo respetivamente.

Proposta de resolução: Sabemos que, tanto o contradomínio da função cosseno é $[-1, 1]$. A função cosseno está ao quadrado e $(-9x)$ tem de domínio $\mathbb{R}$, então

$$0 \leq \cos^2(-9x) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{\cos^2(-9x)}{5} \leq \frac{1}{5}$$

$$-\frac{9}{5} \leq \frac{\cos^2(-9x)}{5} - 2 \leq 0$$

O valor $-\frac{9}{5}$ é o valor mínimo e o valor 0 é o valor máximo.